第一章　向量和空间解析几何

§1 向　　量

1. 向量的概念

有些物理量不但在数量上有大小之分，而且还有方向上的区别，例如位移、速度、力等等．一般我们把这种既有大小又有方向的量称为向量．如果两个向量的大小相等、方向相同，就称它们是相等的向量．

一段以点 O 和点 A 为端点的直线段，若指定其中一个端点 O 为起点，另一端点 A 为终点，则称此线段为有向线段，记为 OA．有向线段 OA 在图形上可用在线段 OA 上加自点 O 指向点 A 的箭头表示．因为有向线段 OA 非但有一定的长度，而且也规定了一个指向，因此可采用有向线段作为向量的几何表示．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的指向表示向量的方向(见图 1.1)．我们采用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{O'A'}$、$\overrightarrow{PB}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a'}$、$\boldsymbol{b}$ 分别表示图 1.1 中相应的向量．图 1.1 中直线段 OA 与 $O'A'$ 的长度相等，而且有向线段 OA 与 $O'A'$ 的指向一致，因此它们所表示的向量是相等的，即 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}$．下面我们通过有向线段来阐明向量运算和运算规则．

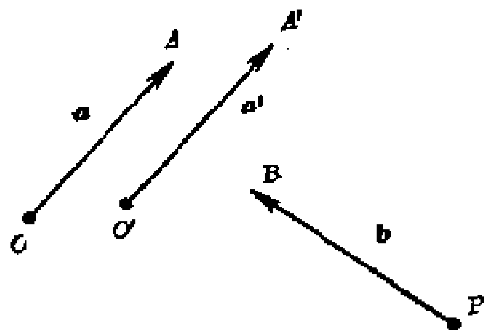


图 1.1

1° 向量的模　表示向量大小的数值(绝对值)称为该向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示．图 1.1 中向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模 $|\overrightarrow{OA}|$ 即为有向线段 OA 的长度

2° 零向量　若 $|\boldsymbol{a}|=0$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零向量．一般用 $\boldsymbol{0}$ 表示零向量．显然零向量的几何表示为一个几何点．因此我们规定零向

量的方向可以是任意指向.

3° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1.2($a$)). 这种定义向量加法运算的规则称为三角形规则. 如果上述图形中 O、A、C 三点不共线，则我们也可采用下述平行四边形规则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和. 作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA 和 OB 为相邻的两边作平行四边形 $OACB$，那么向量 $\overrightarrow{OC}$ 即为所求的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 1.2($b$)). 根据平行四边形的性质可知，这时

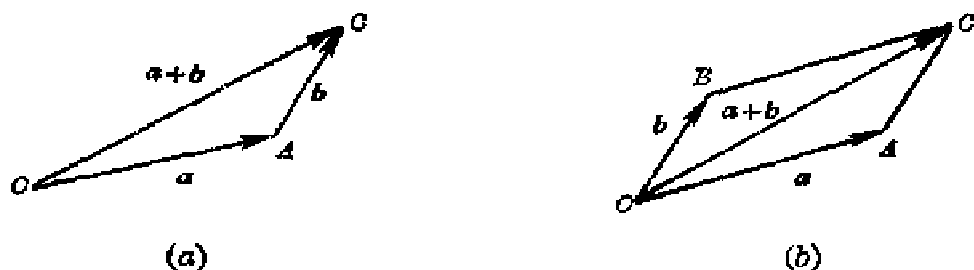


图 1.2

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}.$$

因而由三角形规则可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

当图 1.2(a) 中 O、A、C 三点共线时，也可看作是图 1.2(b) 中 O、A、C、B 四点在一条直线上的情况，易知这时上述结论仍然成立. 因而向量的加法运算是适合交换律的，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

给定向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，要求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 之和以及向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 之和. 从图 1.3 可以得到下述结果:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

所以向量的加法运算适合结合律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{1.2}$$

今后上式等号两端的和式都记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，称它为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 之

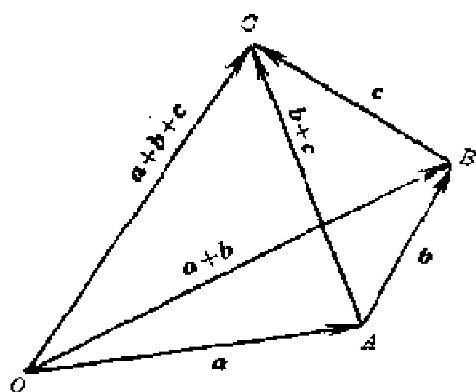


图 1.3

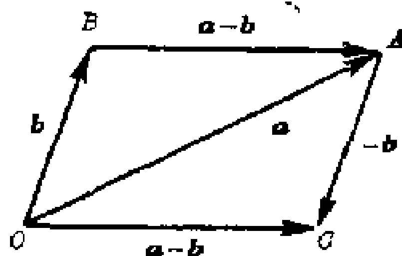


图 1.4

和.

根据向量加法运算规则和零向量定义,便知下列结论成立:

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}. \tag{1.3}$$

4° $-\boldsymbol{a}$　对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$, 向量 $-\boldsymbol{a}$ 的定义如下: 它的模 $|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$,它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 如果有向线段 OA 表示 $\boldsymbol{a}$,则有向线段 AO 就表示向量 $-\boldsymbol{a}$. 由加法运算规则易知下列结论成立:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}. \tag{1.4}$$

我们还把向量 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差, 记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 1.4).

5° $\lambda\boldsymbol{a}$　λ 为一实数, $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个向量, 它的定义如下(图 1.5):

$\lambda\boldsymbol{a}$	模 $\|\lambda\boldsymbol{a}\|$	方　向
$\lambda=0$	0	任　意
$\lambda>0$	$\|\lambda\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$	与 $\boldsymbol{a}$ 一致
$\lambda<0$	$\|\lambda\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$	与 $\boldsymbol{a}$ 相反

根据相似三角形的性质,由图 1.6 便得

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{1.5}$$

设 λ、μ 为两任意实数,则根据上述定义易知下列结论成立:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{1.6}$$

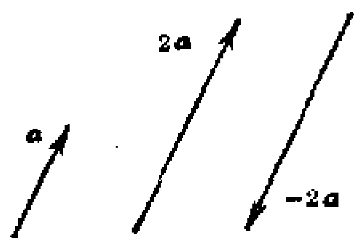


图 1.5

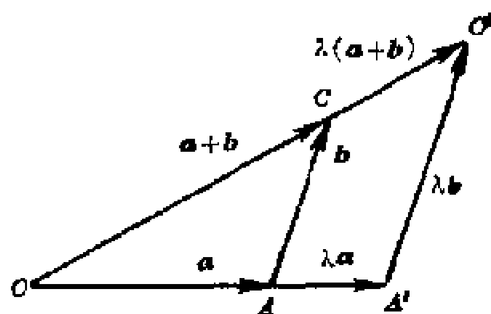


图 1.6

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a}), \tag{1.7}$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}. \tag{1.8}$$

6° 单位向量 若$|\boldsymbol{a}|=1$，则称$\boldsymbol{a}$为单位向量．对于任一非零向量$\boldsymbol{a}$，易知向量$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$是与$\boldsymbol{a}$方向一致的一个单位向量．如果已知$\boldsymbol{a}_0$为与向量$\boldsymbol{a}$方向一致的一个单位向量，则向量$\boldsymbol{a}$可写成下列形式：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0. \tag{1.9}$$

$|\boldsymbol{a}|$和$\boldsymbol{a}_0$分别刻划了向量$\boldsymbol{a}$的数量特征和方向特征．

7° 向量的分解 两个或两个以上的向量通过加法运算可以合成一个和向量．例如，给定向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，可以合成一个和向量$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$．反之，一个向量也可以按需要把它看作是由两个或两个以上向量合成的结果(当然根据不同需要可以有不同的分解方式)．

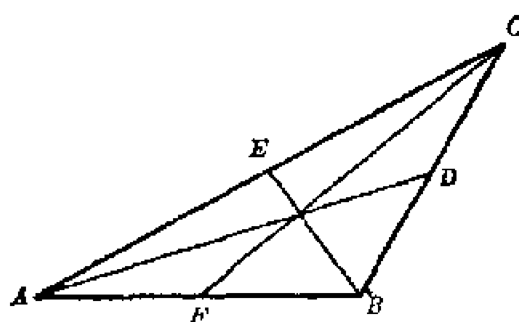


图 1.7

例 1 已知D、E、F分别为三角形的三条边BC、CA、AB上的中点(见图1.7)．求证：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

证明 从图1.7可得：

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

将上述三式相加，便得

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{0}.$$

例 2 已知 G 为三角形 ABC 之重心，O 为空间任一点．求证：

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

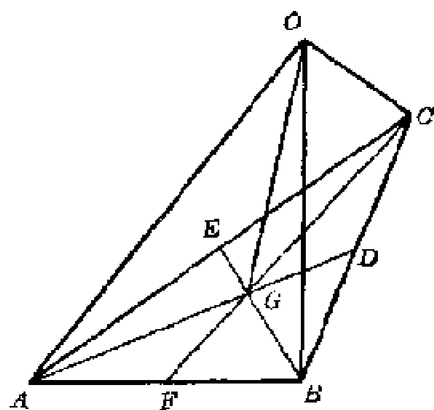


图 1.8

证明 从图 1.8 可得

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG},$$
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG},$$
$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}.$$

三式相加，便得

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}.$$

根据三角形重心的性质可知：

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}.$$

再由例 1 可得：

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF})=\mathbf{0}.$$

因此最后得到

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

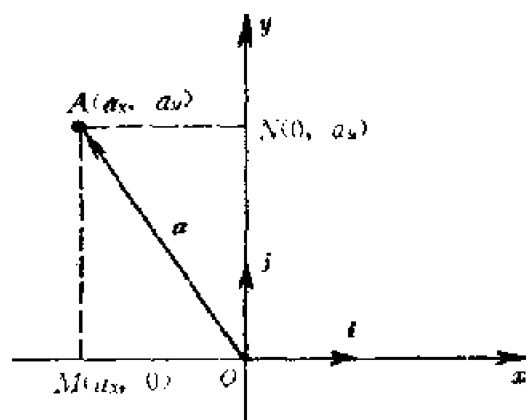


图 1.9

2. 向量的坐标表示

首先讨论平面的情况．设 xOy 为一平面直角坐标系．在此坐标系中[1]，有一个指向为 x 轴正向的单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和一个指向为 y 轴正向的单位向量 $\boldsymbol{j}$（见图 1.9）．设 $\boldsymbol{a}$ 为 xOy 平面上的任一向量．以坐标原点 O 为起点作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，记点 A 的坐标为 (a_x, a_y)．于是点 A 在 x 轴

和 y 轴上的投影点分别为 $M(a_x,\ 0)$ 和 $N(0,\ a_y)$. 按照向量加法运算和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义,得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}. \tag{1.10}$$

这样，数组 $(a_x,\ a_y)$ 通过坐标平面上的点 A 与坐标平面上的向量 $\boldsymbol{a}$ 建立了一一对应的关系. 我们也把 $(a_x,\ a_y)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模即为线段 OA 的长度,所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}. \tag{1.11}$$

上述平面直角坐标系 xOy 也可以看成是由原点 O 和平面上两个相互垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 组成,所以也可记为 $\{O;\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$.

进一步讨论空间情形. 设 O 为空间一点, $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为空间相互垂直的单位向量,且它们排列符合右手法则，即当将右手的食指、中指和姆指竖成相互垂直的位置时，食指、中指、姆指的指向能分别与向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的指向一致. 通过点 O 分别沿 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 指向作三条有向直线 Ox、Oy、Oz, 构成了一个空间直角坐标系，记为 $\{O;\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$,如图 1.10 所示. Ox、Oy、Oz 就是坐标系的三根坐标轴，分别称为 x 轴、y 轴、z 轴. 由 x 轴和 y 轴所决定的平面称为 xOy 坐标面，同样还有 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 点 O 称为坐标原点, $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 均称为坐标向量.

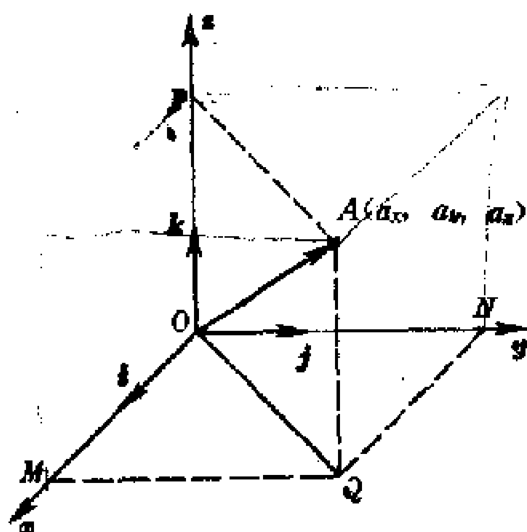


图 1.10

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间任一向量，以坐标原点 O 为起点作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,再按坐标轴方向把 $\overrightarrow{OA}$ 分解成

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}, \tag{1.12}$$

其中 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$、$\overrightarrow{OP}$ 为分别与坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 平行 (即方向一致或相反) 的向量 (图 1.10). 根据 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的定义, 向量 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$、$\overrightarrow{OP}$ 可分别写成下列形式:

$$\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{ON}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OP}=a_z\boldsymbol{k},$$

其中 a_x、a_y、a_z 都是实数. 于是向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解成

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.13}$$

这样，数组 (a_x, a_y, a_z) 就与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 之间建立了一一对应关系，我们称数组 (a_x, a_y, a_z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 中的坐标，称式(1.13)为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

下面讨论利用 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 a_x, a_y, a_z 表示 $|\boldsymbol{a}|$. 从图 1.10 可知 $\overrightarrow{OQ}$ 为 xOy 坐标面上的向量，且

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}.$$

由式(1.11)可知

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}.$$

又 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}$, $OQAP$ 是一个矩形，线段 QA 的长度等于 $|a_z|$. 因此向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 可表示为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.14}$$

现讨论空间中任一点的坐标. 容易明白，空间任一点 A 的位置由起点在坐标原点 O 的向量 $\overrightarrow{OA}$ 完全确定. 若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 的坐标表示式为(1.13)，我们也称数组 (a_x, a_y, a_z) 是点 A 的坐标.

如果空间点 A 落在 xOy 坐标面上，则按照坐标轴方向将向量 $\overrightarrow{OA}$ 分解时，式(1.12)中 $\overrightarrow{OP}$ 必为零向量. 所以式(1.13)中实数 $a_z=0$. 因此在 xOy 坐标面上任一点 A 的坐标形式必为 $(a_x, a_y, 0)$. 易知，坐标形式为 $(a_x, a_y, 0)$ 的点 A 也必在 xOy 坐标面上. 同样，空间点 A 在 yOz 坐标面上当且仅当它的坐标形式为 $(0, a_y, a_z)$；点 A 在 zOx 坐标面上当且仅当它的坐标形式为 $(a_x, 0, a_z)$.

因为 x 轴既在坐标面 xOy 上，又在坐标面 zOx 上，因而点 A 在 x 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(a_x, 0, 0)$. 同样，点 A 在 y 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(0, a_y, 0)$；点 A 在 z 轴上当且仅当点 A 的坐标形式为 $(0, 0, a_z)$.

例 3 指出下列各点中，哪些是坐标面上的点，哪些又是坐标轴上的点:

$$A(-2, 0, 1), \quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$C(-1,\ 0,\ 0),\quad D(0,\ \pi,\ 0),$$
$$E(0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}),\quad F(-1,\ 1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}).$$

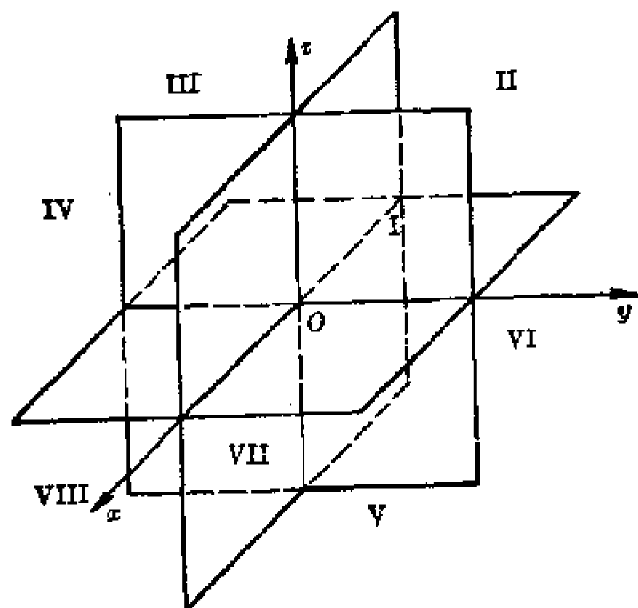


图 1.11

解 A、C 在 zOx 上；D、E 在 yOz 上；C、D 在 xOy 上. C 在 x 轴上；D 在 y 轴上.

空间中不在坐标面上的点被三个坐标面分成八个部分，每一部分称为一个卦限，分别称为第I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII卦限（参看图1.11）. 显然，空间一点 $M(x, y, z)$ 在第I卦限内当且仅当 $x>0$, $y>0$, $z>0$；其余可以类推.

下面讨论向量运算 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标表示. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 (a_x, a_y, a_z) 和 (b_x, b_y, b_z). 易知有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{1.15}$$

因此向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$. 又

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{1.16}$$

因此向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$.

例 4 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $(4, -1, 3)$ 和 $(5, 2, 3)$，试求向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式.

解 由式(1.15)和(1.16)，便得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}&=2(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+3(5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=23\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 5 已知点 P_1, P_2, P_3 的坐标分别为 (a_1, b_1, c_1)、$(a$, l

c_2)、(a_3, b_3, c_3). 试求: (1) P_1、P_2 两点间的距离; (2) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标; (3) 三角形 $P_1P_2P_3$ 的重心 G 的坐标.

解 先求(2). 点 O 为直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$的原点,于是,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\\&=(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})-(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\\&=(a_2-a_1)\boldsymbol{i}+(b_2-b_1)\boldsymbol{j}+(c_2-c_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

因此向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为$(a_2-a_1,\ b_2-b_1,\ c_2-c_1)$.

再求(1). P_1、P_2 两点间的距离即为向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模. 由式(1.14)便得:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.\tag{1.18}$$

最后求(3). 由例 2 便得:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}\right)\\&=\frac{1}{3}[(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})+(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})\\&\quad+(a_3\boldsymbol{i}+b_3\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})]\\&=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)\boldsymbol{j}\\&\quad+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此重心 G 的坐标为$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3},\ \frac{c_1+c_2+c_3}{3}\right)$.

例 6 在图1.12的平行六面体中,顶点P、A、B、C的坐标分别为(p_1, p_2, p_3)、(a_1, a_2, a_3)、(b_1, b_2, b_3),(c_1, c_2, c_3). 试求顶点 D 和 E 的坐标.

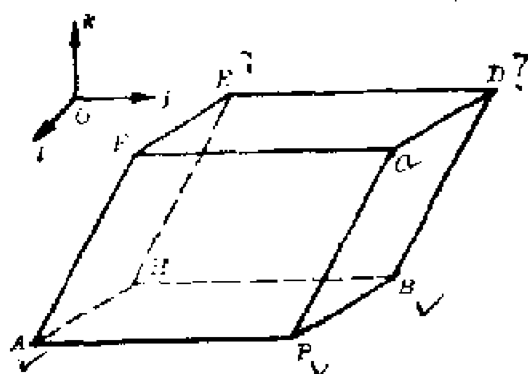


图 1.12

解 因为

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD},$$

$$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC},\quad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}.$$

故 $$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}.$$

因此顶点 D 的坐标为 $(b_1+c_1-p_1,\ b_2+c_2-p_2,\ b_3+c_3-p_3)$. 因为

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PE},$$

$$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC},$$

故
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OP}.$$

所以顶点 E 的坐标为 $(a_1+b_1+c_1-2p_1,\ a_2+b_2+c_2-2p_2,\ a_3+b_3+c_3-2p_3)$.

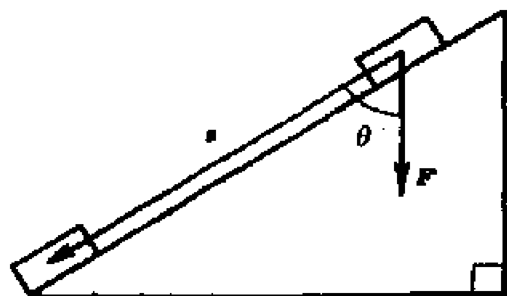


图　1.13

3. 向量的数量积

我们知道，物体在重力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿斜面下滑产生位移 $\boldsymbol{s}$（见图 1.13），在不考虑摩擦力的条件下，$\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为向量 $\boldsymbol{F}$ 与向量 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 因此数量 W 为两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 作用的结果.

定义 1.1　给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个数量，其数值为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta, \tag{1.19}$$

其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，有时也把 θ 写成 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$（见图1.14）.

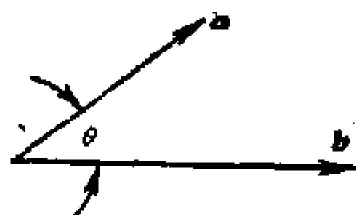


图　1.14

根据上述定义，功 W 就可以写成力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由式(1.19)，我们立刻得到下面两个结果：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \tag{1.20}$$

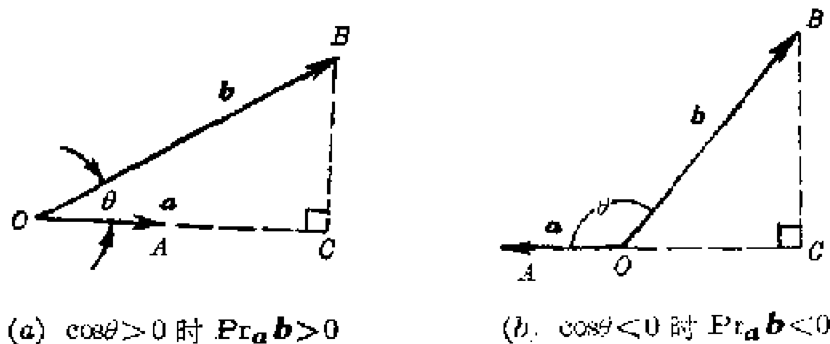
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2. \tag{1.21}$$

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则由式(1.19)可知 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$、$\cos\theta$ 三者中至少有一个值为 0. 如果 $\cos\theta=0$，则说明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\pi/2$，这时称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相互垂直的，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 如果 $|\boldsymbol{a}|=0$，则说明 $\boldsymbol{a}$ 为一个零向量. 根据我们对 $\boldsymbol{0}$ 指向的规定，我们也可以认为这时 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 同样，当 $|\boldsymbol{b}|=0$ 时，也可以认为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 成立. 于是就有下面的定

理：

定理 1.1 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，称数量 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，记为 $\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}$（见图 1.15）. 图 1.15 中线段 OC 的长度即为它的绝对值，它的正负号与 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 一致；如果 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，则规定点 C 与点 O 重合. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 又可写成下列形式



(a) $\cos\theta>0$ 时 $\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}>0$　　(b) $\cos\theta<0$ 时 $\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}<0$

图 1.15

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}. \tag{1.22}$$

在图 1.16中，π_1、π_2 都是垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 的平面，向量$\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{RS}=\mathbf{c}$. 不难看出，线段 OP、PQ 和 OQ 的长度分别为 $|\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}|$、$|\mathrm{Pr}_a\mathbf{c}|$ 和 $|\mathrm{Pr}_a(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})|$. 在直线 OP 上，现设想有一个以点 O 为原点，以 $\boldsymbol{a}$ 的指向为坐标轴方向的一维坐标系. 点 P、Q 的坐标分别为 λ、μ. 易知这时

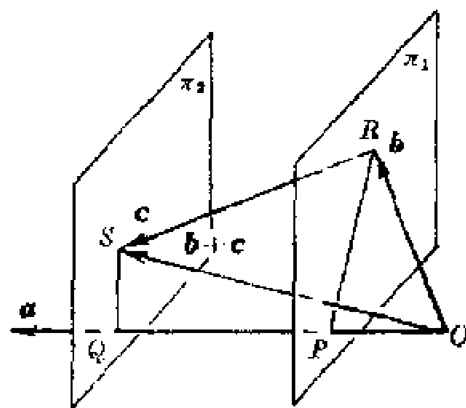


图 1.16

$$\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}=\lambda,\ \mathrm{Pr}_a(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})=\mu,\ \mathrm{Pr}_a\mathbf{c}=\mu-\lambda.$$

于是便有

$$\mathrm{Pr}_a(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})=\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}+\mathrm{Pr}_a\mathbf{c}. \tag{1.23}$$

如果 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，则上式每项均为零，故仍然成立. 注意到式(1.22)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}_a(\boldsymbol{b}+\mathbf{c})\\&=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}+\mathrm{Pr}_a\mathbf{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是相互垂直的单位向量，故由式(1.21)和定理1.1可得下列结果：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1, \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0. \tag{1.26}$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为(a_x, a_y, a_z)和(b_x, b_y, b_z)，则由式(1.24)～(1.26)，便得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_x\boldsymbol{i}+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\\&\quad+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_y\boldsymbol{j}+(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot b_z\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned} \tag{1.27}$$

这就是两个向量数量积的坐标表示.

例7 已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}$ 和 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 由式(1.27)可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=4\cdot5+(-1)\cdot0+3\cdot(-1)=17,$$

$$\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{17}{\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{17}{\sqrt{26}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{17}{\sqrt{26}}\Big/\sqrt{25+1}=\frac{17}{26}.$$

一般地，利用式(1.27)可得 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 的坐标表示如下：

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{1.28}$$

下面利用数量积运算研究向量的方向余弦.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为(a_x, a_y, a_z)，它与坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的夹角分别为 α、β、γ. 从式(1.27)和数量积的定义可得：

$$a_x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha.$$

因 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，于是有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}.$$

同样可以得到 $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$. 因此夹角 α、β、γ 的余弦可由下列公式计算得到：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},\tag{1.29}$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 可以利用 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示为(1.14)式. 特别当 $\boldsymbol{a}$ 为一个单位向量时, 由上式可知 $\boldsymbol{a}$ 的坐标即为($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). 对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 来说, 若 $\boldsymbol{a}_0$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的一个单位向量, 那末它的坐标当然就是($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), 即

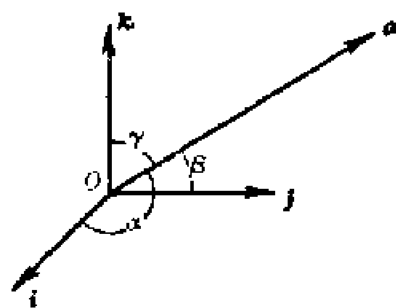


图 1.17

$$\boldsymbol{a}_0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.\tag{1.30}$$

因为 $\boldsymbol{a}_0$ 是一个单位向量,所以 $|\boldsymbol{a}_0|=1$. 于是便得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\tag{1.31}$$

我们知道, 单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 刻划了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向特征. 所以它的坐标($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$)也可用来刻划 $\boldsymbol{a}$ 的方向, 故称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

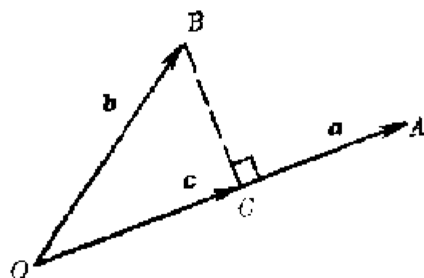


图 1.18

例 8 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, 试求一个与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 以及 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 由式(1.14)可得:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2}.$$

再从式(1.9)可知,

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{3}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{a}_0$ 的坐标即为($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$),故 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{5\sqrt{2}},\quad \cos\beta=\frac{-4}{5\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量, $\boldsymbol{a}_0$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量, 我们称向量

$$\boldsymbol{c}=(\mathrm{Pr}_a\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}_0\tag{1.32}$$

为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的正投影向量（参看图1.18）．利用 $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 的定义，又可把 $\boldsymbol{c}$ 改写成下列形式：

$$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{a}_0=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{a}_0. \qquad (1.33)$$

因此 $\boldsymbol{c}$ 仅与 $\boldsymbol{a}$ 的方向有关而与 $\boldsymbol{a}$ 的模无关．有时也称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的正投影向量．

例 9 已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试求 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的正投影向量 $\boldsymbol{c}$．

解 由式(1.14)，得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5,\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+5^2+2^2}=3\sqrt{5}.$$

再由式(1.9)和(1.28)可以分别得到：

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{4}{5}\boldsymbol{i}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}$$

和

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{5\cdot 3\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

最后根据式(1.33)，便得

$$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}})\boldsymbol{a}_0=3\sqrt{5}\,\frac{2}{3\sqrt{5}}\left(\frac{4}{5}\boldsymbol{i}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\frac{8}{5}\boldsymbol{i}-\frac{6}{5}\boldsymbol{k}.$$

4. 向量积和混合积

先考虑两个向量的向量积运算．在磁场内，运动的电荷将会受到磁场力的作用．从物理学可以知道，某时刻单位正电荷处在点 A 处，此时它的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，点 A 处的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，那末此时它所受到磁场力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{F}|=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{B}|\sin\theta,$$

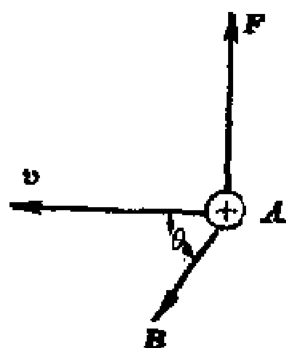


图 1.19

其中 θ 为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$．$\boldsymbol{F}$ 的方向可由 $\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{F}$ 的顺序符合右手法则来确定，即当右手食指指向与 $\boldsymbol{v}$ 一致，中指指向与 $\boldsymbol{B}$ 一致时，与它们垂直的姆指的指向即为 $\boldsymbol{F}$ 的方向（见图1.19）．向量 $\boldsymbol{F}$ 可以看作向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 作用的结果．

定义 1.2 给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一个向量，它的模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta, \tag{1.34}$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)；它的方向是根据 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 顺序符合右手法则来确定.

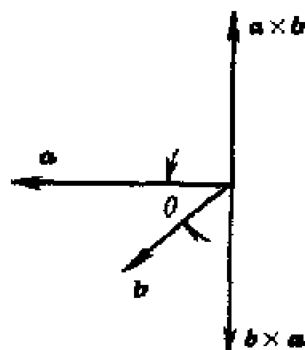


图 1.20

根据上述定义和图 1.20，可以得到向量积运算的如下性质：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}, \tag{1.35}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{1.36}$$

其中 λ 为任一实数. 式(1.35)说明，对于向量积运算，交换律是不成立的.

如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则根据定义可知 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$、$\sin\theta$ 三者中至少有一项的数值为零. 若 $\sin\theta=0$，则 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$. 它说明此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向或者一致或者相反，就称向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是相互平行的，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 若 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中有零向量. 根据我们对 $\boldsymbol{0}$ 指向的规定，我们也可以认为这时 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 于是便有下面的定理：

定理 1.2 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

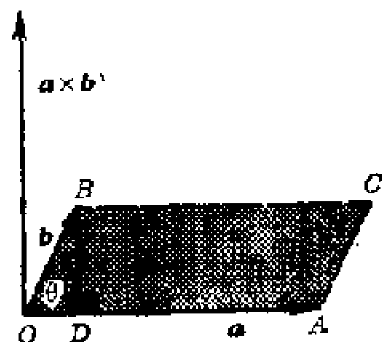


图 1.21

从这个定理立即可得：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}. \tag{1.37}$$

若取 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并以 OA、OB 为两邻边作一平行四边形 $OACB$，BD 为此平行四边形的高，它的长度为 $|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ (见图 1.21). 易知此时平行四边形 $OACB$ 的面积即等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，也就是 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 也可以看作是 O、A、C、B 四点在一条直线上的情况，此时相应的平行四边形的面积也就等于零.

下面考虑三个向量的混合积运算.

定义 1.3 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积.

注意，混合积是一个实数而不是一个向量．现考虑一个以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体(见图1.22)．它的底为以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形．因此平行六面体的底面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$．六面体的高为向量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上投影的绝对值 $||\boldsymbol{c}|\cos\theta|$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角(因为 $\cos\theta$ 可能为负值，所以取绝对值)．因此 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 即为此平行六面体的体积．由此我们可得到下面定理：

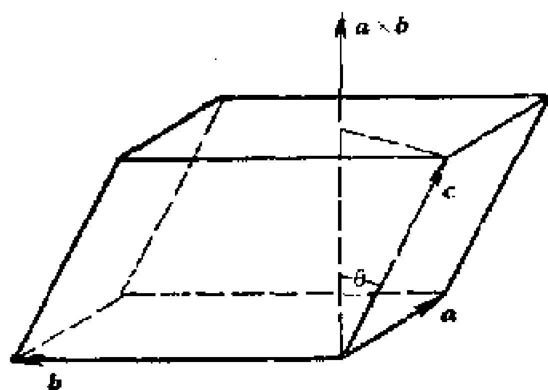


图 1.22

定理 1.3 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量共平面的充要条件为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$．

当 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq 0$ 时(这时 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 一定都不是零向量)，如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的顺序符合右手法则(即可以使右手的食指、中指、姆指的指向分别与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的指向一致)，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角 θ 必为锐角，因此这时混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为正；如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的顺序不符合右手法则，则 θ 为钝角，因此这时混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为负．由此可得下述结果：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}, \tag{1.38}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1.39}$$

现证明关于向量积运算的分配律是成立的，即对于任意给定的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$，下式都成立：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2). \tag{1.40}$$

由式(1.38)和(1.24)可知，对于任意向量 $\boldsymbol{c}$，都有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2))\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\\&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}_2\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{c}\\&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2)]\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

设在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 中，向量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)$ 和向量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)$

$+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2)$的坐标分别为$(x_1, x_2, x_3)$和$(y_1, y_2, y_3)$. 现特别取 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}$,则由上式可得

$$\begin{aligned} x_1 &= (\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2))\cdot\boldsymbol{i} \\ &= ((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2))\cdot\boldsymbol{i} \\ &= y_1. \end{aligned}$$

同样,当令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$, 便得 $x_2=y_2$; 令 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$ 便得 $x_3=y_3$. 因此可知式(1.40)成立.

在进一步研究 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的坐标表示之前,先复习一下二阶行列式和三阶行列式的计算. 二阶行列式按下式计算:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1. \tag{1.41}$$

$a_1b_2-a_2b_1$ 称为左端行列式的展开式. 三阶行列式展开式如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1. \tag{1.42}$$

注意到上式右端可以整理为 $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$,故式(1.42)又可改写为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.43}$$

现在讨论向量积运算的坐标表示. 根据向量积的定义,立即可得到下面结果:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \tag{1.44}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}. \tag{1.45}$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中的坐标分别为$(a_x, a_y, a_z)$和$(b_x, b_y, b_z)$, 则根据式(1.40)、(1.44)、(1.45)和(1.35),有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_x b_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}) + a_x b_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) + a_x b_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) \\
&\quad + a_y b_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) + a_y b_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}) + a_y b_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) \\
&\quad + a_z b_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}) + a_z b_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}) + a_z b_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

利用式(1.41),可把上式改写成

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \tag{1.46}
$$

注意到式(1.43),还可借用三阶行列式把它写成更便于记忆的形式:

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.47}
$$

再讨论混合积运算的坐标表示. 设在直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中,向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的坐标分别为$(a_x, a_y, a_z)$、$(b_x, b_y, b_z)$、$(c_x, c_y, c_z)$. 根据式(1.46)和(1.27)就可得到混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的计算公式:

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.
$$

再注意到式(1.43),就可把它写成下列三阶行列式的形式:

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.48}
$$

例 10　已知$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$. 试求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$.

解　应用式(1.48)计算$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,有

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5.
$$

由式(1.38),便得

$$
(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -5.
$$

应用式(1.47)计算$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$,有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-11\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}.$$

例 11　已知点 P、A、B、C 的坐标分别为 $(-1,\ -2,\ 1)$、$(4,\ 2,\ -1)$、$(2,\ 0,\ -1)$、$(3,\ 1,\ -2)$. 试求三角形 ABC 的面积 S 和四面体 $PABC$ 的体积 V.

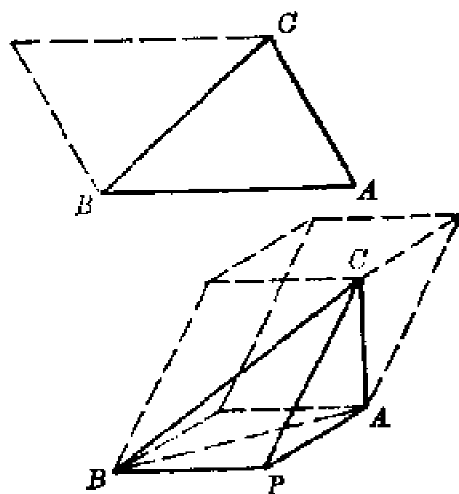


图　1.23

解　三角形 ABC 的面积 S 为以 AB、AC 为邻边的平行四边形面积的一半.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & -2 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}.$$

故
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+0^2}=\sqrt{2}.$$

四面体 $PABC$ 的体积为以 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 为棱的平行六面体体积的六分之一.

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

$$(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=\begin{vmatrix}5 & 4 & -2\\ 3 & 2 & -2\\ 4 & 3 & -3\end{vmatrix}=2.$$

故
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}|=\frac{1}{3}.$$

在本节的最后，我们给出三个向量作向量积运算的计算公式.

定理 1.4*　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$　　(1.49)

证明　当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，上述等式的两端均为 $\boldsymbol{0}$，所以这时等式成立．当 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均为非零向量时，我们可以选取一个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，使得 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{c}$ 在 xOy 坐标面上．设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的坐标分别为(a_x, a_y, a_z)、(b_x, b_y, b_z)、(c_x, c_y, c_z)．根据坐标系的取法，应有

$$b_y=b_z=0,\ c_z=0.$$

于是

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & 0 & 0\\ c_x & c_y & 0\end{vmatrix}=b_xc_y\boldsymbol{k}.$$

进一步可得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ 0 & 0 & b_xc_y\end{vmatrix}=a_yb_xc_y\boldsymbol{i}-a_xb_xc_y\boldsymbol{j}.$$

又

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=a_xc_x+a_yc_y+a_z\cdot 0=a_xc_x+a_yc_y,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_y\cdot 0+a_z\cdot 0=a_xb_x.$$

故

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(a_xc_x+a_yc_y)(b_x\boldsymbol{i})-(a_xb_x)(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j})$$
$$=a_yb_xc_y\boldsymbol{i}-a_xb_xc_y\boldsymbol{j}.$$

比较所得的计算结果，便知式(1.49)成立．　▌

例 12　已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$．试求 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 和 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$．

解　因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=11,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=10,\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=5.$$

故由式(1.49)便得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$
$$=10(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-11(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$
$$=-13\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}.$$

注意到式(1.35)，便有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$$
$$=10(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-5(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=-5\boldsymbol{k}.$$

§2 平面方程和直线方程

1. 平面方程

对于给定的一个平面 π，若空间的一个非零向量 $\boldsymbol{n}$ 与平面 π 上任一向量都垂直，则称向量 $\boldsymbol{n}$ 为平面 π 的一个法向量，简称法向. 在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中，如果给定了平面 π 的一个法向量 $\boldsymbol{n}$，其坐标为(A, B, C)，且给定了平面 π 所通过的一个点 M_0，其坐标为(x_0, y_0, z_0)，则平面 π 就完全确定了（参见图 1.24）. 我们将据此建立平面 π 的方程.

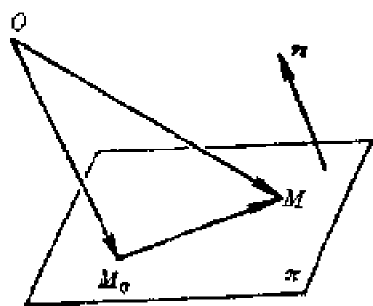


图 1.24

设 $M(x, y, z)$ 为空间一点，显然点 M 在 π 上的充要条件为 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$. 注意到定理 1.1，则充要条件还可以写成下列形式：

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0. \tag{1.50}$$

向量

$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}.$$

故利用式(1.27)，可把式(1.50)写成下列形式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1.51}$$

这就是过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，以 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 为法向量的平面 π 的方程. 这种方程形式称为是平面 π 的*点法式方程*.

例 1 已知点 $M_0(0, -1, 2)$ 在平面 π 上，π 的法向量 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$. 试求平面 π 的方程.

解 由所给定的条件，按式(1.51)便知 π 的点法式方程为

$$2(x-0)+0(y+1)+(-3)(z-2)=0.$$

整理后得

$$2x-3z+6=0.$$

例 2 试求过 $M_1(1, 1, 1)$、$M_2(-1, 0, 1)$、$M_3(0, 1, 0)$三点的平面的方程.

解 此题的关键是要求出平面的一个法向 $\boldsymbol{n}$. 根据向量积的

定义，可知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$就是它的一个法向(见图 1.25)．

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$$

于是按式(1.47)，有

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

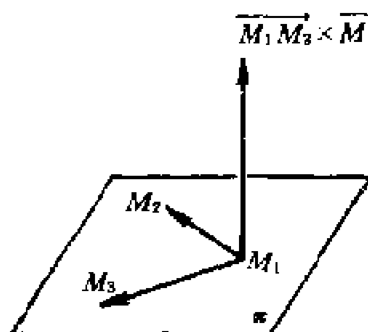


图 1.25

再取 M_3 作为 π 上的已知点．按式(1.51)，便知平面的方程为

$$(x-0)-2(y-1)-(z-0)=0,$$

整理后得

$$x-2y-z+2=0.$$

下面考察平面方程的一般形式．在式(1.51)中，若令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，则式(1.51)就可改写成下列形式：

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{1.52}$$

也就是说平面方程总可以写成上述形式的一次方程．因为法向 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 是非零向量，因此方程中 A、B、C 应不全为零．

反之，在直角坐标系中，任一具有上述形式的一次方程也必是一个平面方程．这是由于 A、B、C 不全为零，因此方程(1.52)必有解(x_0, y_0, z_0)存在(如果 $A\neq 0$，则$\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$即为它的一个解)，即存在$(x_0, y_0, z_0)$，使得

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{1.53}$$

把方程(1.52)减(1.53)就得到(1.51)．它说明方程(1.52)是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 为法向的平面 π 的方程．我们把式(1.52)称为平面的一般方程．

设向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 π_1 和 π_2 的法向．如果 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 就称平面 π_1 与 π_2 垂直；如果 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$ 就称平面 π_1 与 π_2 平行．

例 3 已知平面 π_1 的方程为 $4x-3y+z+6=0$，平面 π_2 的方程为 $x+y-z-1=0$. 试问平面 π_1 与 π_2 是否垂直?

解 从上面有关一般方程的论述，可知:

$$\boldsymbol{n}_1=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

分别为平面 π_1, π_2 的法向量. 又因为

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=4\cdot 1+(-3)\cdot 1+1\cdot(-1)=0,$$

故由定理 1.1 便知 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$. 因此 π_1 与 π_2 垂直.

下面考察若干特殊形式的平面的一般方程. 首先考察三个坐标面 xOy、yOz、zOx 的一般方程. 因为 $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为坐标面 xOy、yOz、zOx 的法向量，坐标原点 $(0,0,0)$ 同时在此三个坐标面上. 由此易知坐标面 xOy、yOz、zOx 的方程分别为

$$z=0,\ x=0,\ y=0. \tag{1.54}$$

在这些坐标面的一般方程中，系数 A、B、C、D 中有一些等于零. 下面分别对一般方程中系数等于零的情况进行讨论.

(1) $D=0$. 这时方程(1.52)具有形式

$$Ax+By+Cz=0.$$

显然坐标原点 $(0,0,0)$ 满足上述方程. 所以这种方程所表示的平面一定通过坐标原点. 反之，从平面点法式方程(1.51)易知，通过坐标原点的平面的一般方程中必有 $D=0$.

(2) $A=0$. 这时方程(1.52)具有形式

$$By+Cz+D=0.$$

易知平面 π 平行于 x 轴的充要条件是 π 的法向 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 $\boldsymbol{i}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=0$. 当法向 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 时，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=0$ 也就是 $A=0$. 所以平面平行于 x 轴的充要条件为此平面的一般方程中 $A=0$.

类似地，平面平行于 y 轴的充要条件为此平面的一般方程中 $B=0$；平面平行于 z 轴的充要条件为此平面的一般方程中 $C=0$.

(3) $A=B=0$. 这时方程(1.52)具有形式

$$Cz+D=0.$$

这时必有 $D\neq 0$，否则 A、B、C 全为零. 根据(2)，该平面的几何特征是它同时平行于 x 轴和 y 轴，亦即该平面平行于 xOy 平面. 读者

容易明白，平面平行于 xOy 坐标面的充要条件为此平面的一般方程中 $A=B=0$. 类似地，平面平行于 yOz 坐标面的充要条件为此平面的一般方程中 $B=C=0$; 平面平行于 zOx 坐标面的充要条件为此平面的一般方程中 $C=A=0$.

例 4 试求通过 y 轴和点 $M_0(-1, 1, 3)$ 的平面 π 的方程.

解 设平面 π 的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

由于 π 通过 y 轴（π 既平行于 y 轴又通过原点），因而根据(1)和(2)便知

$$B=0,\ D=0.$$

又点 $M_0(-1, 1, 3)$ 在平面 π 上，即 $(-1, 1, 3)$ 满足 π 的方程. 代入方程便得

$$-A+3C=0.$$

显然 $C\neq 0$，否则 A、B、C 全为零. 以 $A=3C$, $B=D=0$ 代入方程 $Ax+By-Cz+D=0$ 后，有

$$3Cx+Cz=0.$$

因为 $C\neq 0$，最后可得 π 的方程为

$$3x+z=0.$$

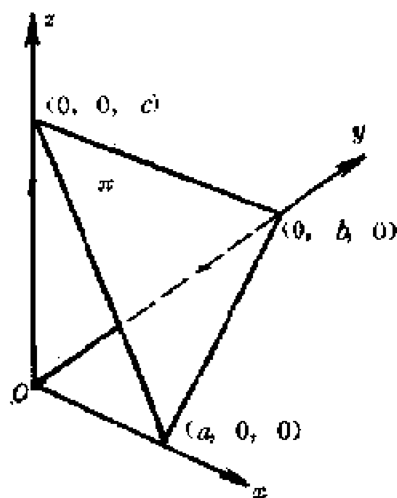


图 1.26

如果平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，A、B、C、D 全不为零，则可把此方程改写成下列形式:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1.55}$$

其中 $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$. 称式(1.55)为平面的*截距式方程*. 记此平面 π 与 x 轴的交点为 $M(x, y, z)$. 点 M 同时处在平面 π、坐标面 xOy 和坐标面 zOx 上. 因此 (x, y, z) 应满足下列联立方程:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\\ z=0,\\ y=0.\end{cases}$$

易知 $x=a,\ y=0,\ z=0$ 为此方程组的解. 也就是说 π 与 x 轴的交点的坐标为 $(a,\ 0,\ 0)$. 同样, π 与 y 轴交点的坐标为 $(0,\ b,\ 0)$; π 与 z 轴的交点的坐标为 $(0,\ 0,\ c)$. a、b、c 分别称为平面 π 在三个坐标轴上的截距(见图 1.26).

例 5 试求由三个坐标面以及平面 $3x-2y-4z+24=0$ 所围成的四面体的体积 V.

解 从本章 §1 例 11 我们知道, 只要求得此四面体的四个顶点的坐标就可求得它的体积. 易知, 四面体的四个顶点中一个为坐标原点, 另外三个就是平面 $3x-2y-4z+24=0$ 分别与三个坐标轴的交点 R、S, T. 把方程 $3x-2y-4z+24=0$ 化成下列截距式:

$$\frac{x}{-8}+\frac{y}{12}+\frac{z}{6}=1.$$

由此可知, 四面体四个顶点的坐标分别为 $O(0,\ 0,\ 0)$、$R(-8,\ 0,\ 0)$、$S(0,\ 12,\ 0)$、$T(0,\ 0,\ 6)$. 于是

$$(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OS})\cdot\overrightarrow{OT}=\begin{vmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=-576.$$

故
$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OS})\cdot\overrightarrow{OT}\right|=96.$$

2. 点到平面的距离

给定直角坐标系 $\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$, 已知平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 点 M_0 的坐标为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. 现要求点 M_0 到平面 π 的距离 d.

设 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为 π 上任一点, 即

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

从图 1.27 易知, 点 M_0 到 π 的距离 d 就是向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 在 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 上投影的绝对值, 即

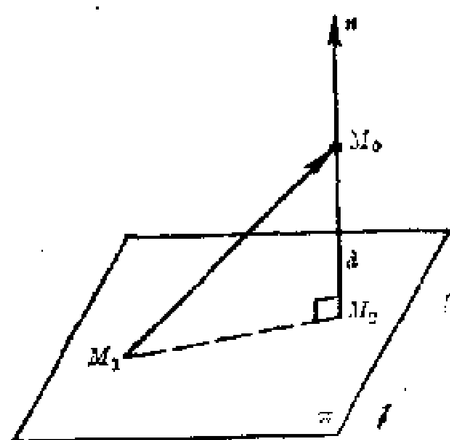


图 1.27

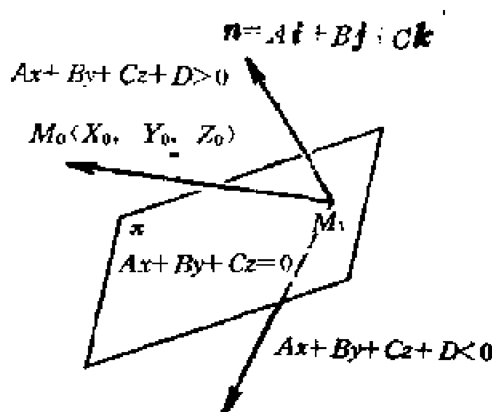


图 1.28

$$d=|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$$
$$=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

因为点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$在 π 上，故

$$-Ax_1-By_1-Cz_1=D.$$

最后得到

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{1.56}$$

从上面的推导中还可以知道，$Ax_0+By_0+Cz_0+D$ 的正负号与 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}$ 相同．于是，对于空间任一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，如果 $Ax_0+By_0+Cz_0+D>0$，则 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{M_1M_0}$ 的夹角必为锐角，故该点必在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的对应于法向 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 所指的一侧；如果 $Ax_0+By_0+Cz_0+D<0$，则该点必在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的另一侧(见图 1.28)．

例 6　给定点 $A(2, 0, 0)$、$B(0, -3, 0)$、$C(0, 0, -2)$、$D(3, 5, -1)$．试求点 D 到由 A、B、C 三点所确定的平面 π 的距离 d.

解　易知点 $A(2, 0, 0)$、$B(0, -3, 0)$、$C(0, 0, -2)$分别在 x 轴、y 轴、z 轴上．因此它们就是平面 π 与三根坐标轴的交点．于是平面 π 的截距式方程为

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=1.$$

把它写成一般方程为

$$3x-2y-3z-6=0.$$

按式(1.56),便得

$$d=\left|\frac{9-10+3-6}{\sqrt{9+4+9}}\right|=\frac{4}{\sqrt{22}}.$$

例7 已知平面 π 的方程为 $6x-2y+3z+8=0$, 点 M_0 的坐标为(1, 1, 3). 试求平面 π 上的一点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 使得 $|\overrightarrow{M_2M_0}|$ 恰好等于点 M_0 到 π 的距离 d.

解 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为 π 上任一点. 从图 1.27 易知, 向量 $\overrightarrow{M_2M_0}$ 等于 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 在 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 上的正投影向量. 按式(1.32), 并注意到式(1.22), 有

$$\overrightarrow{M_2M_0}=(\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0})\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}$$

$$=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}}{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}.$$

若取点 M_1 为 π 与 y 轴的交点,则得点 M_1 的坐标为(0, 4, 0). 把 $M_1(0, 4, 0)$代入上式,得

$$\overrightarrow{M_2M_0}=\frac{21}{49}(6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=\frac{18}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{9}{7}\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_2}&=\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{M_2M_0}\\&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-\left(\frac{18}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{9}{7}\boldsymbol{k}\right)\\&=-\frac{11}{7}\boldsymbol{i}+\frac{13}{7}\boldsymbol{j}+\frac{12}{7}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此点 M_2 的坐标为$\left(-\frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

3. 直线方程

直线 L 上任一非零向量称为 L 的一个方向向量. 若给定了直线 L 上的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 和 L 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 直线就完全确定了. 现导出直线 L 的方程.

设 $M(x, y, z)$为空间一点(图 1.29), 显然点 M 在直线 L 上的充分必要条件为: $\overrightarrow{M_0M}\parallel\boldsymbol{s}$, 即向量$\overrightarrow{M_0M}$可写成下列形式:

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s},\tag{1.57}$$

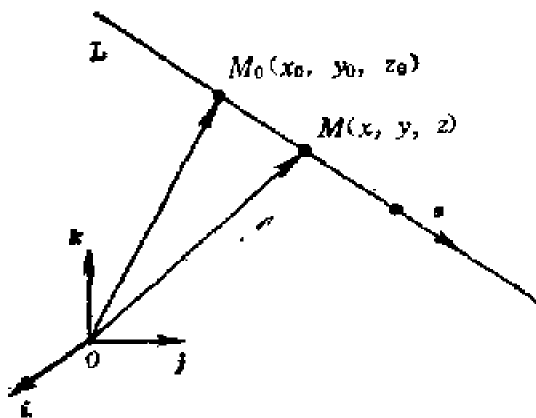


图 1.29

其中 t 为实数. 因为向量

$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0},$$

故式(1.57)又可写成

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+t\boldsymbol{s}.$$

把上式写成坐标形式，即得直线 L 的参数方程:

$$\begin{cases}x=x_0+tl,\\ y=y_0+tm,\\ z=z_0+tn,\end{cases}\tag{1.58}$$

其中 t 称为参数. 如果 l, m, n 均不为零，则下列三个相等的量都等于 t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\tag{1.59}$$

我们称它为直线 L 的标准方程. 请注意，式(1.59)实际上表示两个方程组成的联立方程，即

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}.\end{cases}\tag{1.60}$$

每个方程都是 x、y、z 的一次方程，它们分别表示平行于 z 轴和 x 轴的平面. 直线 L 就是这两个平面的交线.

如果 l、m、n 中有一个等于零，例如 $l=0$，但 m、n 均不等于零，从式(1.58)导出直线 L 的方程为:

$$\begin{cases}x=x_0,\\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\end{cases}\tag{1.61}$$

即将直线 L 表示为平面 $x=x_0$ 与平面 $\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 之交线. 如果对式(1.59)中三个分式 $\dfrac{x-x_0}{l}$、$\dfrac{y-y_0}{m}$、$\dfrac{z-z_0}{n}$ 作这样的约定: 当某个分式的分母为零时，相应的分子也取零值. 这样当 $l=0$

时，式(1.61)也就可由式(1.59)得到. 又如，若$l=m=0$, $n\neq 0$，则按式(1.58)，直线L的方程为

$$\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0, \end{cases} \tag{1.62}$$

即将直线L表示为平面$x=x_0$与$y=y_0$之交线. 按约定它也可以直接从式(1.59)得到.

根据上面的讨论，任一直线L的方程都可写成联立方程：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1.63}$$

的形式，即将L表示为平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的交线. 反之，只要平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$不与平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$平行，则它们的交线L当然也就可以用式(1.63)表示. 我们将式(1.63)称为**直线的一般方程**.

如果给定直线L的一般方程(1.63)，那末L的方向向量$\boldsymbol{s}$应怎样得到呢？显然，$\boldsymbol{s}$应既与平面π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$的法向$\boldsymbol{n}_1=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k}$垂直，又与平面$\pi_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的法向$\boldsymbol{n}_2=A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}$垂直(见图1.30). 因为平面$\pi_1$与平面$\pi_2$是不平行的，所以

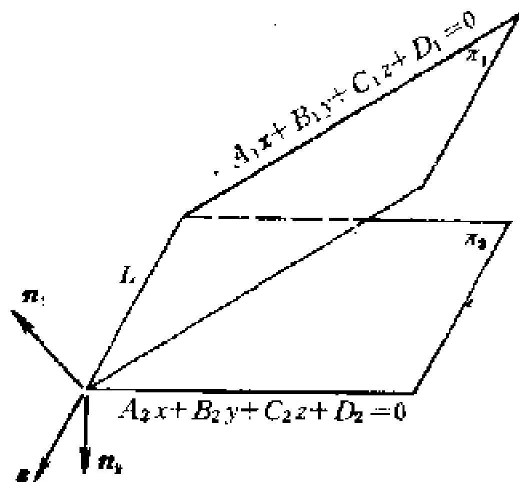


图 1.30

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\neq\boldsymbol{0}.$$

于是可取L的一个方向向量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2. \tag{1.64}$$

例8 给定点$M_0(3, -4, 2)$和$M_1(4, 3, 1)$，试求通过点M_0和M_1的直线L的方程.

解 显然，向量

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

为 L 上的一个非零向量. 所以可以取它作为直线 L 的一个方向向量 $\boldsymbol{s}$, 即取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 由 $\boldsymbol{s}$ 和点 M_0, 按式(1.59)就可以获得直线 L 的标准方程

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-2}{-1}.$$

例 9　试求通过点 $M_0(-3, 2, 0)$ 且平行于直线 L_1:

$$\begin{cases} x-4z=3, \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$$

的直线 L.

解: 因为直线 L 与 L_1 平行, 因此 L_1 的方向向量也就是 L 的方向向量. 注意到式(1.64), L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取为

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

再由 $\boldsymbol{s}$ 和 M_0, 按式(1.59)就可得到 L 的标准方程

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{1}.$$

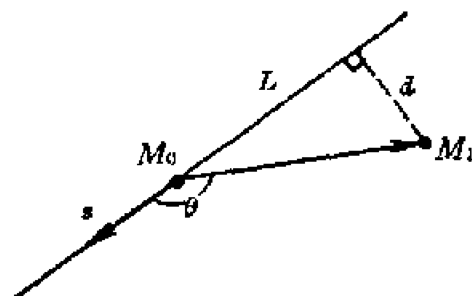


图　1.31

例 10　试求点 $M_1(2, 1, 3)$ 到直线 L: $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离 d.

解: 从给定的直线 L 的标准方程可知, 点 $M_0(-1, 1, 0)$ 为 L 上的一点, 向量

$$\boldsymbol{s}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

为 L 的一个方向向量. 从图 1.31 不难看出,

$$d=|\overrightarrow{M_0M_1}|\sin(\widehat{\boldsymbol{s}, \overrightarrow{M_0M_1}})=\frac{|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

而
$$\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{k}.$$

于是有
$$d=\frac{\sqrt{36+36}}{\sqrt{1+4+1}}=2\sqrt{3}.$$

4*. 平面束

设直线 L 由它的一般方程(1.63)给定，其中方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 表示平面 π_1，方程 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 表示平面 π_2. 直线 L 为平面 π_1 与 π_2 的交线. 空间中通过直线 L 的平面有无限个，我们把这些平面所组成的集合称为通过直线 L 的平面束(图 1.32).

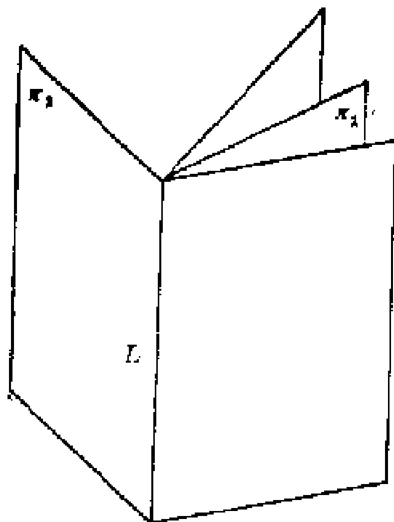


图 1.32

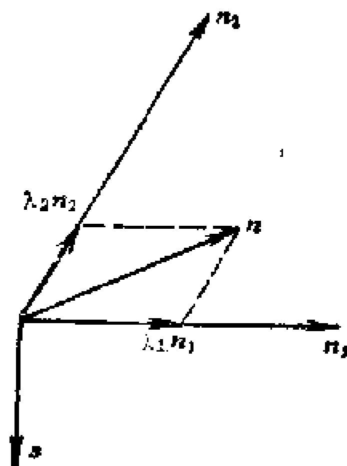


图 1.33

设 π 为此平面束中的一个平面，它的法向量为 $\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{n}_1=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k}$ 为 π_1 的法向量；$\boldsymbol{n}_2=A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}$ 为 π_2 的法向量. 设 $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的一个方向向量. 因为直线 L 同时在平面 π、π_1 和 π_2 上，因此向量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 都垂直于向量 $\boldsymbol{s}$. 所以向量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 共面. 向量 $\boldsymbol{n}$ 就可以按向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的方向分解成

$$\boldsymbol{n}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1+\lambda_2\boldsymbol{n}_2,$$

其中 λ_1、λ_2 都是实数(见图 1.33). 考察方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{1.65}$$

显然它是一个平面方程，$\boldsymbol{n}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1+\lambda_2\boldsymbol{n}_2$ 就是它的法向量. 如果 (x, y, z) 为联立方程(1.63)的解，则它一定也是方程(1.65)的解. 所以直线 L 也一定在此平面上，也就是说式(1.65)即为平面 π 的方程. 由此可知，通过直线 L 的平面束中的任一方程都可以写成式(1.65)的形式；反之，具有式(1.65)形式的方程一定表示通过直线 L 的平面. 我们称式(1.65)为通过直线 L 的平面束方程. 如果 $\lambda_2\neq0$，则式(1.65)也可改写成

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{1.66}$$

其中 $\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

例 11 试求通过点 $M_0(1, 2, -1)$ 和直线 L:

$$\begin{cases} x+y-2z+1=0, \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$$

的平面 π.

解 π 是通过 L 的平面束中的一个平面，因此 π 的方程可以写成下列形式

$$\lambda_1(x+y-2z+1)+\lambda_2(2x-y+z-1)=0.$$

显然，点 $M_0(1, 2, -1)$ 不在平面 $x+y-2z+1=0$ 上，故其中 $\lambda_2\neq0$. 把上述方程两边都除以 λ_2 后可得

$$\lambda(x+y-2z+1)+(2x-y+z-1)=0,$$

其中 $\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. 因点 $M_0(1, 2, -1)$ 在此平面上，即有

$$\lambda(1+2+2+1)+(2-2-1-1)=0,$$

故
$$\lambda=\frac{1}{3}.$$

于是平面 π 的方程为

$$\frac{1}{3}(x+y-2z+1)+(2x-y+z-1)=0,$$

整理后得
$$7x-2y+z-2=0.$$

§3 向量函数与曲线、曲面

1. 向量函数

质点在空间运动的轨迹就是一条空间曲线．取定空间中的一个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，则运动质点在不同时刻所处的不同位置就可用坐标$(x,y,z)$来表示．设质点在时刻$t$时，处在点$P(x,y,z)$，则这三个坐标$x$、$y$、$z$都应是$t$的函数：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$．因此可用下列参数方程来描述此质点的运动规律：

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{1.67}$$

一般地，随t的连续变动，式(1.67)在直角坐标系中形成一条空间曲线．我们称式(1.67)为空间曲线的参数方程，其中t称为参数．特别地，当$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$均为t的线性函数时，式(1.67)就可写成式(1.58)形式．这时它所表示的空间曲线就是一条直线．由式(1.67)，可把向量$\overrightarrow{OP}$写成

$$\overrightarrow{OP}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}.$$

若把$\overrightarrow{OP}$记为$\boldsymbol{r}$，向量$\boldsymbol{r}$的坐标均为t的函数．我们称向量$\boldsymbol{r}$为关于变量t的一个向量函数，用记号$\boldsymbol{r}(t)$表示．这时相应的空间曲线就可用向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.68}$$

来表示．一般地，向量函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$就是$R^1$的一个子集(一般为一个区间$(a,b)$)到$R^3$的一个映射：

$$t\to(x(t),\ y(t),\ z(t)). \tag{1.69}$$

这个映射的象集就是R^3空间内的一条曲线．如果$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$都是t的连续函数，则所得的象集就是R^3中的一条连续曲线．

例1 试问：向量函数

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\,\boldsymbol{i}+b\sin t\,\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

(其中a、b、c为常数)表示怎样的空间曲线？

解　相应的曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \\ z = c. \end{cases}$$

故整个曲线都落在平面 $z=c$ 上，即它为平面 $z=c$ 上的一条平面曲线. 由 $x=a\cos t$, $y=b\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，易知此曲线是 $z=c$ 平面上，其中心在 $(0,\ 0,\ c)$ 处，对称轴分别平行于 x 轴和 y 轴，半轴长度分别为 a 和 b 的椭圆. 特别当 $c=0$ 时，该椭圆在 xOy 坐标面上.

例 2　如果质点一方面按逆时针方向以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，另一方面又沿 z 轴正向以等速度 c 上升，已知当 $t=0$ 时，质点的位置处在点 $(a,\ 0,\ 0)\ (a>0)$ 处，试求质点在 $[0,\ T]$ 时间间隔内的运动轨迹.

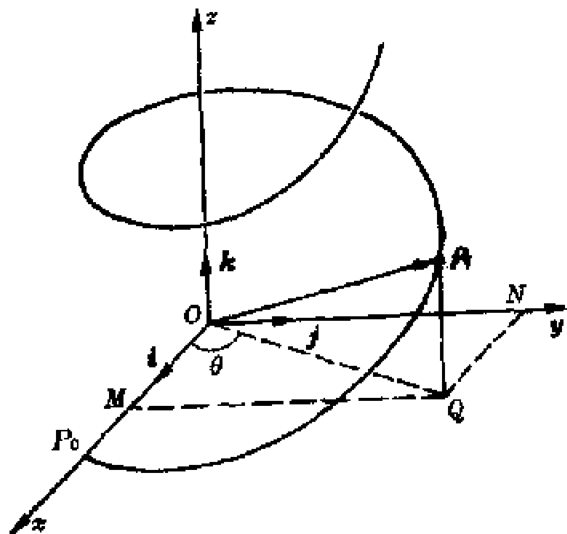


图　1.34

解　设在时刻 t，质点的位置在点 P_t 处. 把向量 $\overrightarrow{OP_t}$ 按三个坐标向量的方向分解(见图 1.34)，有

$$\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{QP_t}.$$

记 θ 为向量 $\boldsymbol{i}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角. 因为质点按逆时针方向以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，$t=0$ 时质点处在 $P_0(a,\ 0,\ 0)$ 处. 所以

$$\theta = \omega t,$$

$$\overrightarrow{OM} = a\cos\theta\boldsymbol{i} = a\cos\omega t\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{ON} = a\sin\theta\boldsymbol{j} = a\sin\omega t\boldsymbol{j}.$$

又因质点以等速度 c 上升，所以

$$\overrightarrow{QP_t} = ct\boldsymbol{k}.$$

于是质点的运动方程就可用下列向量函数描述:

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP_t} = a\cos\omega t\boldsymbol{i} + a\sin\omega t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k} \quad (0\leqslant t\leqslant T).$$

它是一段螺旋线.

下面讨论向量函数的导数. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为描述质点运动位置的向量函数. 现考察质点在时刻 t 的运动速度. 设质点在时刻 t 处在点 P 的位置,在时刻 $t+\Delta t$ 处在点 Q 的位置(见图 1.35),即

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}(t),\quad \overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t).$$

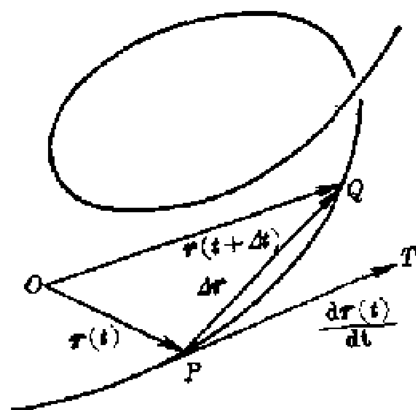


图 1.35

现令向量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t).$$

那末,向量

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

表示质点在 $[t,\ t+\Delta t]$ 这段时间内的平均速度. 质点在 t 时刻的瞬时速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 即为

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

若把 $\boldsymbol{v}(t)$ 记为 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$,则当 $\Delta t\to 0$ 时,因 $\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}$ 的方向的极限与曲线在点 P 处的切线的方向向量 $\overrightarrow{PT}$ 的方向一致, 所以质点在点 P 处的速度向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 的方向即为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在点 P 处切线的一个方向向量.

一般地,给定向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

存在,则称向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 处是可导的, 并把这个极限记为 $\boldsymbol{r}'(t)$ 或 $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$,即

$$\boldsymbol{r}'(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t},\tag{1.70}$$

称它为向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 处的导数. 设向量函数

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

其中 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 都是关于 t 的可微函数,则

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\{[(x(t+\Delta t)-x(t))\boldsymbol{i}+(y(t+\Delta t)-y(t))\boldsymbol{j}+(z(t+\Delta t)-z(t))\boldsymbol{k}]/\Delta t\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{1.71}$$

显然，当向量 $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\neq\boldsymbol{0}$ 时，它就是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在点 $(x(t), y(t), z(t))$ 处切线的一个方向向量，它的模为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{1.72}$$

设曲线由向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给出：

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}.$$

M_0 为此曲线上相应于 $t=t_0$ 的点，即

$$\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}(t_0)=x(t_0)\boldsymbol{i}+y(t_0)\boldsymbol{j}+z(t_0)\boldsymbol{k}.$$

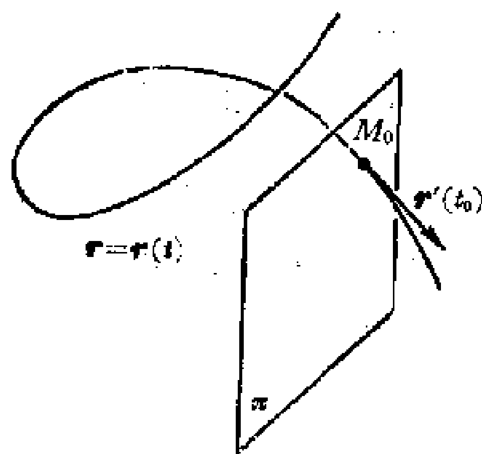


图 1.36

如果向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t=t_0$ 处可微，则导数

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=x'(t_0)\boldsymbol{i}+y'(t_0)\boldsymbol{j}+z'(t_0)\boldsymbol{k}$$

便是曲线在点 M_0 处的切线上的一个方向向量(图 1.36)．那末曲线在点 M_0 处的切线方程可按式(1.59)写成

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{1.73}$$

我们称通过点 M_0，以向量 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 为法向的平面 π 为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在点 M_0 处的法平面．易知，此法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0. \tag{1.74}$$

例 3 试求曲线 $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 时所对应的点 M_0 处的切线方程和法平面方程.

解 按式(1.71),有

$$\boldsymbol{r}'(t)=-a\sin t\boldsymbol{i}+a\cos t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

故
$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}.$$

又
$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\boldsymbol{j}+\frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}.$$

按式(1.73)便可得点 M_0 处的切线方程为

$$\begin{cases} y-a=0, \\ \dfrac{x}{-a}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{2}}{1}. \end{cases}$$

按式(1.74)便可得点 M_0 处的法平面方程为

$$-ax+z-\frac{\pi}{2}=0.$$

下面进一步讨论向量函数的求导法则. 设向量函数 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为 t 的函数,它们在 t 处都可导,函数 $f(t)$ 在 t 处也是可导的;λ 为一常数. 那末通过运算容易得到下列求导法则:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}, \tag{1.75}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \tag{1.76}$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)\boldsymbol{a})=f(t)\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}+\frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{a}, \tag{1.77}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}, \tag{1.78}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}. \tag{1.79}$$

例如,我们来推导公式(1.78). 因为

$$\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}$$
$$=\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)\cdot(\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t))+(\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t))\cdot\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}$$
$$=\boldsymbol{a}(t+\Delta t)\cdot\frac{\boldsymbol{b}(t+\Delta t)-\boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{b}(t).$$

因而当 $\Delta t\to 0$ 时就可得到公式(1.78).

2*. 曲线的曲率和挠率

先简单介绍空间曲线的弧长计算公式. 在平面直角坐标系中,如果一条平面曲线由下列参数方程给出:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

其中$x(t)$、$y(t)$都是可导的, 我们已知道, 此平面曲线上从点$M_0(x(t_0),y(t_0))$到点$M(x(t),y(t))$这段弧长s可用下列公式计算:

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

同样, 在空间直角坐标系中, 当一条空间曲线由参数方程(1.67)或用相应的向量函数(1.68)给出, 其中$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$都是可导的, 则此曲线上从点$M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$到点$M(x(t),y(t),z(t))$这段弧长$s$可用下列公式计算:

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (1.80)$$

因此,

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (1.81)$$

如果给定此曲线的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的导数 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\frac{ds}{dt}>0$, 且

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}.$$

于是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}. \tag{1.82}$$

易知它是与向量 $\boldsymbol{r}'(t)$ 方向一致的一个单位向量.

1° 弗朗内标架 对于光滑的平面曲线,我们在其上每点处都可确定切向和法向两个相互垂直的方向. 对于光滑的空间曲线,我们也要在其上每点处确定三个相互垂直的方向. 如果曲线 Γ 由下列以曲线弧长 s 为参数的向量函数给出:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}, \tag{1.83}$$

从式(1.82)易知, $\boldsymbol{r}'(s)$ 是曲线 Γ 上点 $M(s)$ (参数值 s 所相应的点)处的单位切向量, 记为 $\boldsymbol{T}(s)$. 它就是我们要确定的第一个方向.

第二个方向我们取与 $\boldsymbol{T}'(s)$ 同向的单位向量, 记为 $\boldsymbol{N}(s)$. 于是

$$\boldsymbol{T}'(s)=|\boldsymbol{T}'(s)|\boldsymbol{N}(s). \tag{1.84}$$

注意到 $\boldsymbol{T}(s)$ 是一个单位向量, 对于等式 $\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=1$ 的两侧关于 s 求导, 便得到

$$\boldsymbol{T}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0.$$

所以 $\boldsymbol{T}'(s)\perp\boldsymbol{T}(s)$, 即 $\boldsymbol{N}(s)$ 是垂直于 $\boldsymbol{T}(s)$ 的单位向量.

第三个方向应是一个与 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$ 都垂直的单位向量, 记为 $\boldsymbol{B}(s)$. 取

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s). \tag{1.85}$$

这样, 在曲线 Γ 上对应于弧长参数值为 s 的点 $M(s)$ 上, 我们确定了彼此垂直的三个单位向量 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$、$\boldsymbol{B}(s)$. $\{\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$ 称为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $M(s)$ 处的弗朗内(Frenet)标架, $\boldsymbol{T}(s)$ 是 Γ 在点 $M(s)$ 处的切向量, $\boldsymbol{N}(s)$ 和 $\boldsymbol{B}(s)$ 依次称为 Γ 在点 $M(s)$ 处的主法向量和从法向量. 由向量 $\boldsymbol{T}(s)$、$\boldsymbol{N}(s)$ 所确定的平面 π 称为曲线 Γ 在点 $M(s)$ 处的密切平面(见图 1.37).

下面我们通过弗朗内标架描述曲线的一些特性.

2° 曲线的曲率 随着点 $M(s)$ 在曲线 Γ 上移动, 相应的弗朗

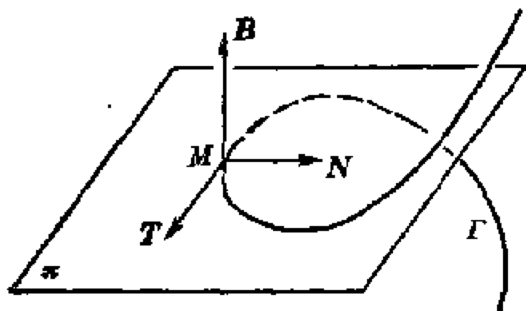


图 1.37

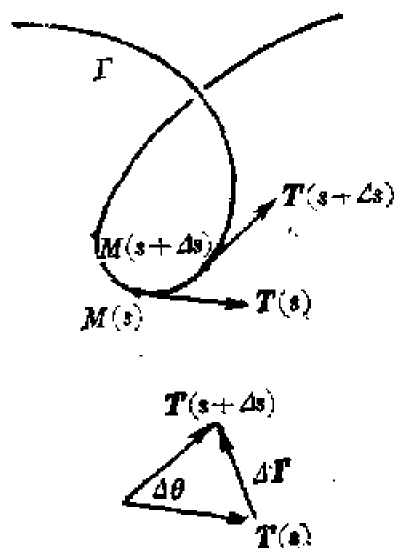


图 1.38

内标架也作刚体运动. 我们首先考察切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 关于 s 的旋转率.

类似于平面情况,当点 $M(s)$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 移到点 $M(s+\Delta s)$ 时, 若记 $\Delta\theta$ 为切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$ 的夹角(见图1.38), 则切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 在点 $M(s)$ 处的旋转率为

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|. \tag{1.86}$$

我们称 $k(s)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $M(s)$ 处的曲率. 当 $k(s)\neq 0$ 时, 其倒数

$$\rho(s)=\frac{1}{k(s)} \tag{1.87}$$

称为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $M(s)$ 处的曲率半径. 下面给出曲率的计算公式.

定理1.5 若曲线 Γ 的方程由以弧长 s 为参数的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 给出,则其曲率

$$k(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|; \tag{1.88}$$

若曲线 Γ 的方程由具有一般参数 t 的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给出, 则其曲率

$$k(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{1.89}$$

证明 先证式(1.88). 因 $\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$,又由图1.38易知

$$|\boldsymbol{T}'(s)|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=k(s). \tag{1.90}$$

所以式(1.88)成立.

现证式(1.89). 注意到式(1.84)、(1.85)和(1.88),不难得到

$$\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)=\boldsymbol{T}(s)\times k(s)\boldsymbol{N}(s)=k(s)\boldsymbol{B}(s).$$

$\boldsymbol{B}(s)$是一个单位向量,所以

$$k(s)=|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)|. \tag{1.91}$$

又从式(1.82),有

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

故
$$\boldsymbol{r}''(s)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\Big/\frac{ds}{dt}$$

$$=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right)\boldsymbol{r}'(t)+\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}''(t)\right]\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

将上面得到的$\boldsymbol{r}'(s)$和$\boldsymbol{r}''(s)$代入式(1.91),注意到$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$,便得式(1.89). ∎

3° 曲线的挠率 刚才我们研究了曲线Γ的切向量$\boldsymbol{T}(s)$关于弧长的旋转率. 现在进一步研究曲线的密切平面关于弧长s的旋转率. 这等价于考察从法向量$\boldsymbol{B}(s)$关于弧长s的旋转率.

先考察$\boldsymbol{B}'(s)$的方向. 由于$\boldsymbol{B}(s)$为垂直于$\boldsymbol{T}(s)$的单位向量,因此

$$\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{B}(s)=1,\ \boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0.$$

分别对上面两个等式的两侧关于s求导,并注意到式(1.84),不难得到下列结果:

$$\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{B}(s)=0,\ \boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0.$$

它说明$\boldsymbol{B}'(s)\perp\boldsymbol{B}(s)$且$\boldsymbol{B}'(s)\perp\boldsymbol{T}(s)$. 所以$\boldsymbol{B}'(s)$一定平行于主法向量$\boldsymbol{N}(s)$. 我们将$\boldsymbol{B}'(s)$记为如下形式:

$$\boldsymbol{B}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s). \tag{1.92}$$

我们称 $\tau(s)$ 为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 在点 $M(s)$ 处的挠率.

由以上定义易知

$$|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|. \tag{1.93}$$

类似于式(1.90),容易说明

$$|\tau(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|, \tag{1.94}$$

其中 $\Delta\varphi$ 为从法向量 $\boldsymbol{B}(s)$ 与 $\boldsymbol{B}(s+\Delta s)$ 的夹角. 下面给出挠率的计算公式.

定理1.6 若曲线 Γ 的方程由以弧长 s 为参数的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 给出,则挠率

$$\tau(s)=\frac{(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2}; \tag{1.95}$$

若曲线 Γ 的方程由具有一般参数 t 的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给出,则挠率

$$\tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}. \tag{1.96}$$

证明 先证式(1.95). 因为

$$\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s),$$

$$\boldsymbol{N}(s)=\frac{1}{|\boldsymbol{T}'(s)|}\boldsymbol{T}'(s)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|}\boldsymbol{r}''(s),$$

故
$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)=\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$$
$$=\frac{1}{k(s)}(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)).$$

两边求导,进一步可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}'(s)&=[k(s)(\boldsymbol{r}''(s)\times\boldsymbol{r}''(s)+\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s))\\&\quad-k'(s)(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))]/(k(s))^2\\&=\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s)}{k(s)}-\frac{k'(s)(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))}{(k(s))^2}.\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{B}'(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s)$ 和 $\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=1$,便有

$$\begin{aligned}\tau(s)&=-\boldsymbol{B}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)\\&=-\left(\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s)}{k(s)}-\frac{k'(s)(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))}{(k(s))^2}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{r}''(s)}{k(s)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}'''(s))\cdot\boldsymbol{r}''(s)}{(k(s))^3} = \frac{(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|^2}.$$

现在证明式(1.96). 在定理1.5的证明中, 我们已得到下列结果:

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t),$$

$$\boldsymbol{r}''(s) = \alpha(t)\boldsymbol{r}'(t) + \frac{1}{|\boldsymbol{r}''(t)|^2}\boldsymbol{r}''(t),$$

其中
$$\alpha(t) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right),$$

再利用
$$\boldsymbol{r}'''(s) = \frac{d\boldsymbol{r}''(s)}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\frac{d\boldsymbol{r}''(s)}{dt},$$

可知 $\boldsymbol{r}'''(s)$ 应具有下列形式:

$$\boldsymbol{r}'''(s) = \beta(t)\boldsymbol{r}'(t) + \gamma(t)\boldsymbol{r}''(t) + \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}\boldsymbol{r}'''(t).$$

于是便得

$$(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|^6}(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t).$$

又由式(1.88)和(1.89), 可得

$$|\boldsymbol{r}''(s)|^2 = \frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}{|\boldsymbol{r}'(t)|^6}.$$

最后将所得关于 $(\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s))\cdot\boldsymbol{r}'''(s)$ 和 $|\boldsymbol{r}''(s)|^2$ 的结果代入式(1.95), 便得式(1.96). ∎

例 4 试求曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}\ (a>0)$ 的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$.

解 因为

$$\boldsymbol{r}''(s) = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} - \frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j},$$

故由式(1.88)便得:

$$k(s) = |\boldsymbol{r}''(s)| = \frac{1}{a}.$$

因为 $\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$, $\boldsymbol{N}(s)$ 是与 $\boldsymbol{r}''(s)$ 同向的单位向量, 故

$$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{r}'(s) = -\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + \cos\frac{s}{a}\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{N}(s)=-\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i}-\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(s)&=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\\&=\left(-\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{i}+\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{j}\right)\times\left(-\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i}-\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}\right)\\&=\left(\cos^2\frac{s}{a}+\sin^2\frac{s}{a}\right)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{B}'(s)=\boldsymbol{0}.$$

又$|\tau(s)|=|\boldsymbol{B}'(s)|$，所以得

$$\tau(s)=0.$$

例 5 设运动质点在时刻 t 的位置由向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 给出．试求质点在时刻 t 的运动速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$．

解 设当 $t=0$ 时(初始时刻)，质点在 M_0 处；在时刻 t 时，质点在点 M 处．s 为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 上从点 M_0 到 M 这一段曲线的弧长．若以 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别表示曲线在点 M 处的单位切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 和主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$．于是

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}.$$

注意到 $\boldsymbol{T}'(s)=|\boldsymbol{T}'(s)|\boldsymbol{N}(s)$ 和曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$，便有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)&=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\\&=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\boldsymbol{N}.\end{aligned}$$

因此加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ 必在点 M 的密切平面内，它的切线方向分量为 $\dfrac{d^2s}{dt^2}$，主法方向分量为 $\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$．

例 6 试求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\,(a>0)$ 的曲率 $k(t)$ 和挠率 $\tau(t)$．

解 容易算得下列结果：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t)&=-a\sin t\boldsymbol{i}+a\cos t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\\\boldsymbol{r}''(t)&=-a\cos t\boldsymbol{i}-a\sin t\boldsymbol{j},\\\boldsymbol{r}'''(t)&=a\sin t\boldsymbol{i}-a\cos t\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=a\sin t\boldsymbol{i}-a\cos t\boldsymbol{j}+a^2\boldsymbol{k},$$

$$(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\cdot\boldsymbol{r}'''(t)=a^2.$$

所以按式(1.89)和(1.96)便可分别得到

$$k(t)=\frac{a}{1+a^2},$$

和

$$\tau(t)=\frac{1}{1+a^2}.$$

3. 一些特殊曲面

点的运动轨迹为曲线，而曲线的运动轨迹就是曲面. 这一小节我们着重介绍一些特殊的曲面及其方程.

1° 柱面　直线 L 沿着一条给定曲线 Γ 运动，且在运动过程中始终与一个给定的非零向量 $\mathbf{s}$ 保持平行，这样形成的曲面称为柱面(见图 1.39). 运动的直线 L 称为此柱面的母线，曲线 Γ 称为此柱面的准线.

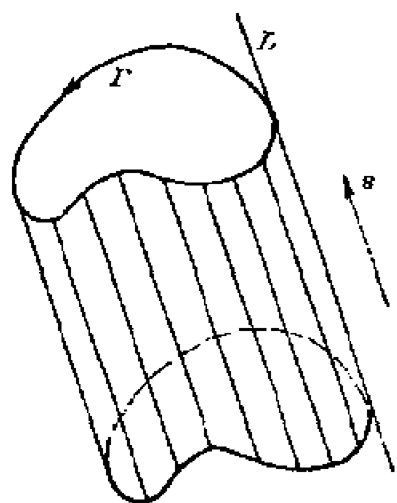


图1.39

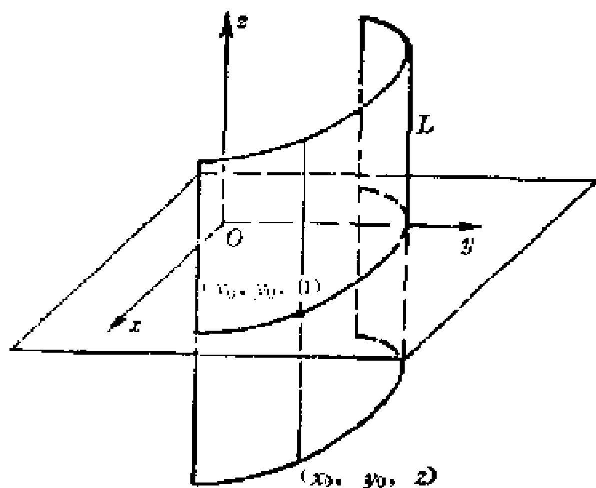


图 1.40

现考察母线平行于坐标轴的柱面. 设柱面的母线 L 平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$. 如果这时点 $(x_0, y_0, 0)$ 在此柱面上，那末过点 $(x_0, y_0, 0)$ 平行于向量 $\boldsymbol{k}$ 的直线一定也在此柱面上，因而对于任意实数 z，点 (x_0, y_0, z) 一定也在此柱面上(见图 1.40). 所以只要确定这种柱面与 xOy 坐标面的相交部分(一条平面曲线)，即可确定这种曲面. 因此这种柱面的方程必具有 $f(x, y)=0$ 的形式. 类似地，平行于 x 轴或 y 轴的柱面方程的形式分别为 $f(y, z)=0$ 或

$f(x, z)=0$.

例 7　在平面直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$中，方程 $Ax+By+C=0$ 和 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别表示 xOy 坐标面上的直线和双曲线. 但在空间直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中，这两个方程将分别表示以此直线和双曲线为准线，母线平行于 $\boldsymbol{k}$ 的平面(图 1.41(a))和双曲柱面(图 1.41(b)).

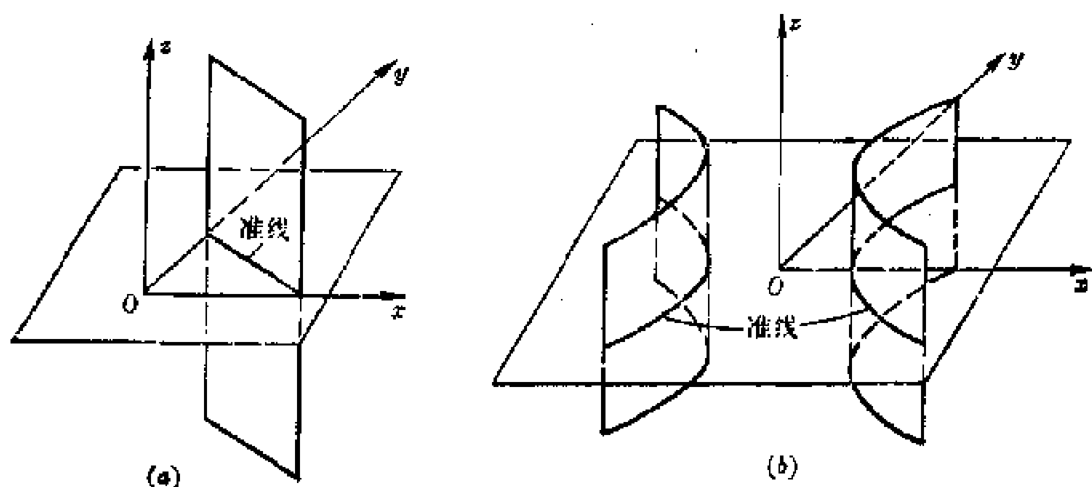


图　1.41

例 8　在直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中，方程 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 和 $z=ax^2$ 分别表示母线平行于 $\boldsymbol{i}$ 的椭圆柱面(图 1.42(a))和母线平行于 $\boldsymbol{j}$ 的抛物柱面(图 1.42(b)).

2°　旋转曲面　平面上一条曲线 Γ 绕这个平面上的一条给定直线 L 旋转而形成的曲面称为旋转曲面(参看图 1.43)，称曲线 Γ 为此旋转曲面的母线，直线 L 为此旋转曲面的轴. 特别地，当旋转曲面的轴就是 z 轴，母线为 yOz 坐标面上的曲线 Γ 时，对于 Γ 上任一点 $M_0(0, y_0, z_0)$，当它绕 z 轴旋转到点 $M(x, y, z)$处，从图 1.44，易知应有

$$\begin{cases} z=z_0, \\ x^2+y^2=y_0^2. \end{cases}$$

若曲线 Γ 在平面坐标系$\{O; \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中的方程为 $y=f(z)$，则可知此旋转曲面的方程可写成下列形式:

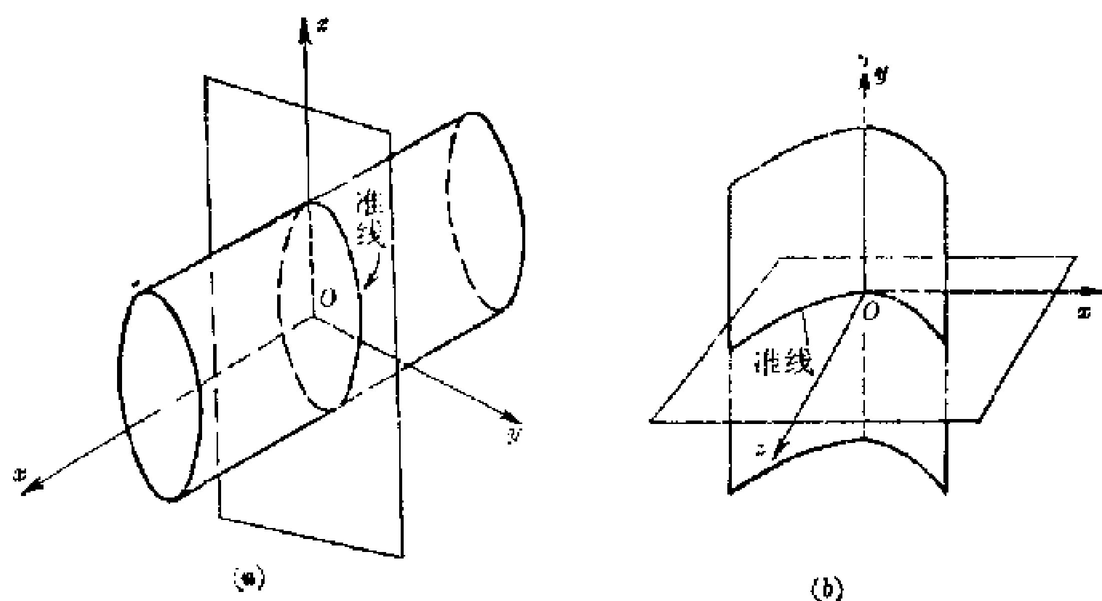


图 1.42

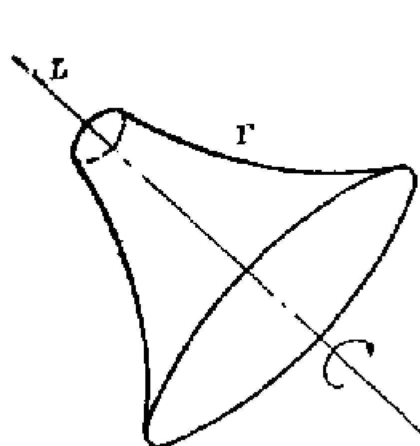


图 1.43

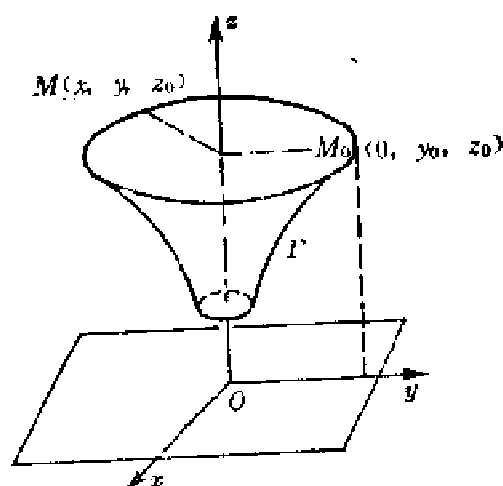


图 1.44

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=f(z). \tag{1.97}$$

若此平面曲线 Γ 由方程 $F(y,z)=0$ 给出，则此旋转曲面方程可写成

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{1.98}$$

如果旋转曲面的轴为 x 轴或 y 轴，可有类似结果.

例 9 在 yOz 坐标面上的直线 $y=3z$，双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$，椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面分别为圆锥面（图

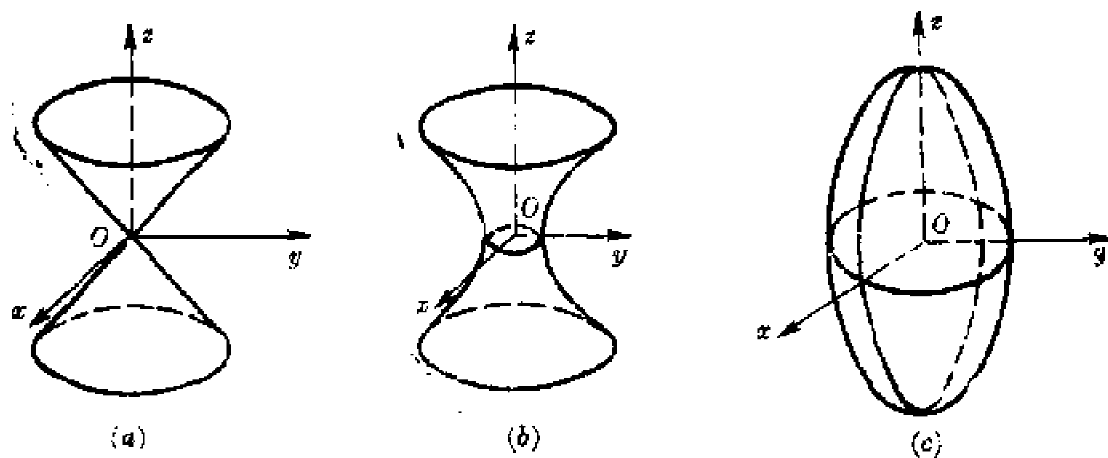


图 1.45

1.45(a))

$$x^2+y^2=9z^2, \tag{1.99}$$

旋转单叶双曲面(图 1.45(b))

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1, \tag{1.100}$$

旋转椭球面(图 1.45(c))

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{1.101}$$

例 10　在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中,方程

$$x=a(y^2+z^2) \tag{1.102}$$

和

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2+z^2}{b^2}=1 \tag{1.103}$$

分别表示以 x 轴为旋转轴的旋转抛物面(见图 1.46(a))和以 y 轴为旋转轴的旋转双叶双曲面(见图 1.46(b)).

3° 椭球面　设曲面在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的方程已知,想要对整个曲面的形状有所了解,我们可用截口曲线的方法,即用一族或几族平行的平面去截这个曲面.这些平面与曲面之交如果非空,则都是平面曲线,称为截口曲线.我们通过对这些截口曲线形状的分析就能对曲面的形状有所了解.例如,给定椭球面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0), \tag{1.104}$$

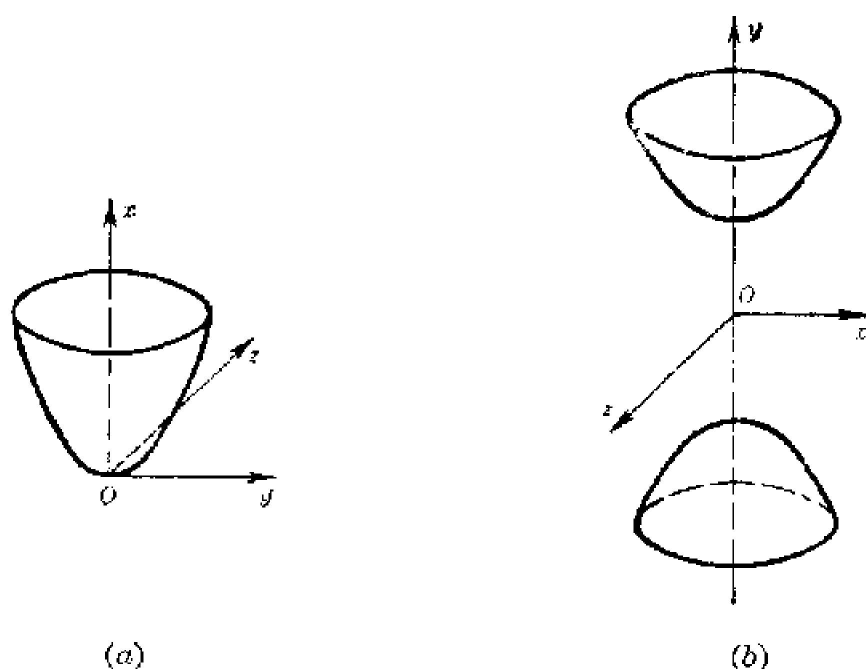


图 1.46

我们先用平行于坐标面 xOy 的平面 $z=z_0$ 去截它，得到截口曲线方程（$z=z_0$ 平面上的平面曲线方程）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2}. \qquad (1.105)$$

易知，当 $z_0=0$ 时，它即为坐标面 xOy 上的截口曲线，此曲线是一个半轴分别为 a 和 b 的椭圆．当 $|z_0|<c$ 时，截口曲线也都是椭圆，不过半轴分别为 $a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$ 和 $b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$．可见 $|z_0|$ 越大半轴就越小．当 $|z_0|=c$ 时，截口曲线就缩成一点．当 $|z_0|>c$ 时，平面 $z=z_0$ 与曲面就没有交线了．

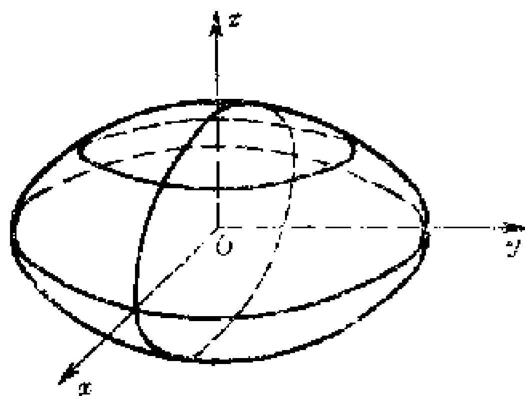


图 1.47

同样，以平面 $y=y_0$（$x=x_0$）去截曲面，可以获得类似的结果．当 $|y_0|<b$（$|x_0|<a$）时，截口曲线为椭圆；当 $|y_0|=b$（$|x_0|=a$）时，截口曲线为一个点；当 $|y_0|>b$（$|x_0|>a$）时，平面与曲面没有交线．这样，我们对

这个曲面的形状就有了大致的了解(参看图 1.47).

比较椭球面方程(1.104)和旋转椭球面方程(1.101),便知后者为前者的特例. 对于旋转抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$ 和旋转圆锥面 $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$,类似地可有更为一般的曲面:**椭圆抛物面**

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad (a>0,\ b>0), \tag{1.106}$$

和**椭圆锥面**

$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad (a>0,\ b>0); \tag{1.107}$$

而对旋转单叶双曲面方程(1.100)和旋转双叶双曲面方程(1.103),易知方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.108}$$

和

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1.109}$$

分别为比它们更一般的方程. 它们表示的曲面分别称为**单叶双曲面**和**双叶双曲面**. 用平面 $z=z_0$ 去截这些曲面,如果交线存在,则截口曲线为椭圆. 在这些方程中,如果 $a=b$,则相应的椭圆就是圆了,相应的曲面就是以 z 轴为旋转轴的旋转曲面.

4° 双曲抛物面 在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中给定曲面方程

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad (a>0,\ b>0). \tag{1.110}$$

当用平面 $z=z_0$ 去截这个曲面时,所得的截口曲线为

$$\begin{cases} z=z_0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z_0. \end{cases}$$

当 $z_0>0$ 时,它为平面 $z=z_0$ 上的一条双曲线,实轴平行于 x 轴;当 $z_0<0$ 时,它也是平面 $z=z_0$ 上的一条双曲线,但实轴平行于 y 轴;当 $z_0=0$ 时,它为平面 $z=0$ 上的两条相交直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$.

当用平面 $x=x_0$ 去截这个曲面时,所得的截口曲线为

$$\begin{cases} x=x_0, \\ z=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

它为平面 $x=x_0$ 上的一条抛物线，开口向下(与 $\boldsymbol{k}$ 反向).

当用平面 $y=y_0$ 去截这个曲面时，所得的截口曲线为

$$\begin{cases} y=y_0, \\ z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}. \end{cases}$$

它为平面 $y=y_0$ 上的一条抛物线，开口向上(与 $\boldsymbol{k}$ 同向).

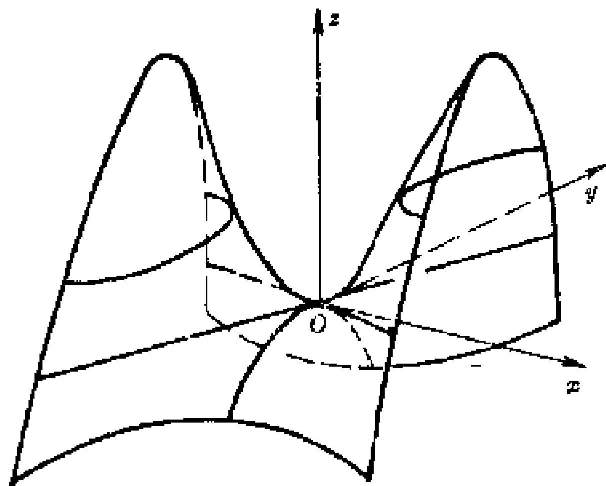


图 1.48

通过对这些截口曲线的分析，可以知道这个曲面的形状象一个马鞍，所以称为马鞍面，或称双曲抛物面(图 1.48).

4. 曲面的一般方程

一般曲面可看作 R^2 的一个子集(一般为一个平面区域)到 R^3 的一个映射

$$(u,\ v)\to(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \tag{1.111}$$

的象集，其中 $x(u,\ v)$、$y(u,\ v)$、$z(u,\ v)$ 分别表示 x、y、z 为变量 u 和 v 的函数. 因而一般曲面方程可写成含有两个参数的参数方程:

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v), \end{cases} \tag{1.112}$$

或写成向量函数的形式:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)=x(u,\ v)\boldsymbol{i}+y(u,\ v)\boldsymbol{j}+z(u,\ v)\boldsymbol{k}. \tag{1.113}$$

当 $u=u_0$(u_0 为一常数)时，参数方程(1.112)中只含有一个参数 v. 它表示一条空间曲线，显然此曲线是在曲面上的. 对于不同的 u_0 值将得到曲面上一族曲线，称它们为 v 曲线. 同样，当 $v=$

v_0（v_0为一常数）时，参数方程(1.112)中只含有参数 u. 它也表示曲面上的一条曲线. 对于不同的 v_0 值将得到曲面上的另一族曲线，称它们为 u 曲线. u 曲线和 v 曲线都称为参数方程(1.112)所给定的坐标曲线. 这个曲面就可看成是由这两族坐标曲线"交织"而成的(见图 1.49).

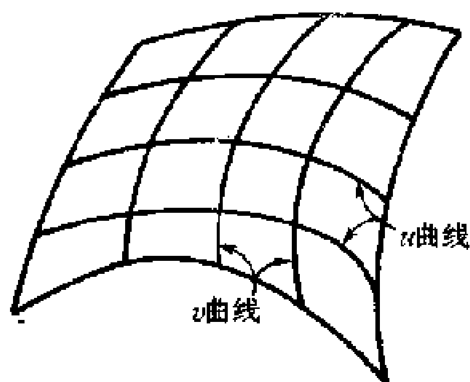


图 1.49

例如，球心在坐标原点，半径为 ρ（ρ 为常数）的球面可看成是由坐标面 zOx 上的一个半径为 ρ 的半圆

$$\begin{cases} z=\rho\cos\varphi, \\ x=\rho\sin\varphi \end{cases} \quad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

绕 z 轴旋转而成的. 因而球面方程可写成

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

其中 φ 和 θ 为参数(图 1.50). 如果把此球面看作地球表面，从南极到北极的轴线看作 z 轴，则 φ 曲线相当于地球的经线，θ 曲线相当于地球的纬线. 把上述球面方程写成向量函数形式，便为

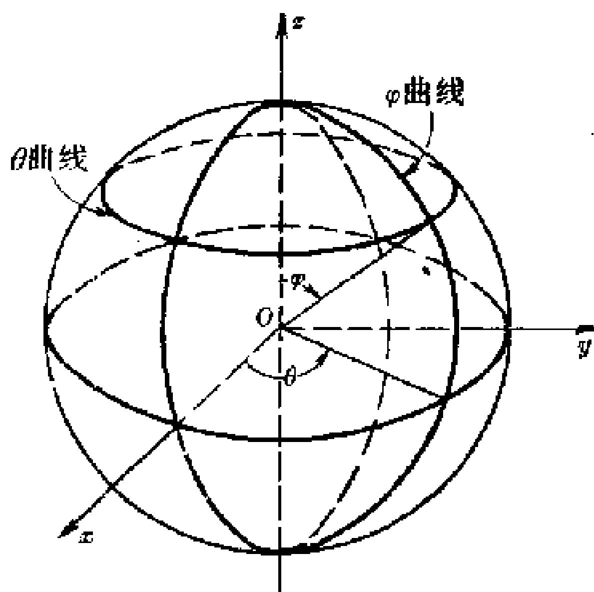


图 1.50

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi,\ \theta)=\rho\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{i}+\rho\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{j}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{k},$$

其中 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

§4 坐标变换

1. 平移与旋转

1° 平移　设空间有两个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{O_1;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$．它们的坐标向量完全相同，但原点不同(见图 1.51)．设向量

$$\overrightarrow{OO_1}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}.$$

再设 M 为空间任一点，它在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标为$(x,y,z)$，而在坐标系$\{O_1;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标为$(x_1,y_1,z_1)$。因为

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M},$$

图 1.51

故
$$\begin{aligned}x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}&=(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})+(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(a+x_1)\boldsymbol{i}+(b+y_1)\boldsymbol{j}+(c+z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由此可得到坐标(x,y,z)与(x_1,y_1,z_1)之间的关系式如下：

$$\begin{cases}x=a+x_1,\\y=b+y_1,\\z=c+z_1,\end{cases}\tag{1.114}$$

称此式为平移公式．

2° 旋转　设空间有两个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{O;\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1\}$(见图 1.52(a))．它们的坐标原点相同，但坐标向量不同．设向量$\boldsymbol{i}_1$与向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为α_1、β_1、γ_1(见图 1.52(b))；向量$\boldsymbol{j}_1$与$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为α_2、β_2、γ_2；向量$\boldsymbol{k}_1$与$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为α_3、β_3、γ_3．坐标向量$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$、$\boldsymbol{k}_1$都是单位向量，所以它们在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标即为它们的方向余弦．于是有

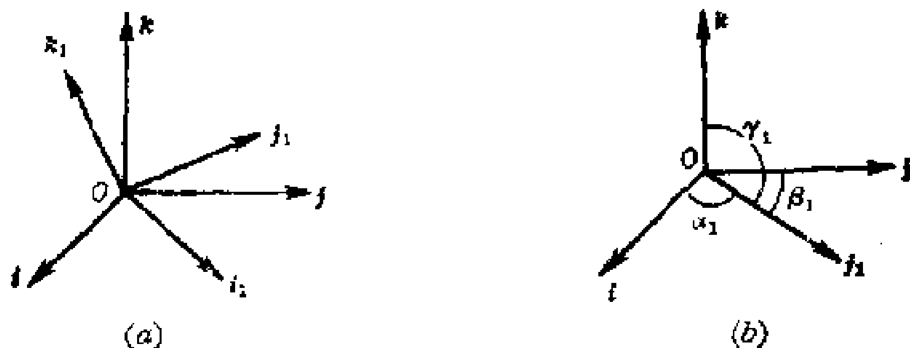


图 1.52

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_1=\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}_1=\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}_1=\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}. \end{cases} \tag{1.115}$$

同样,向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 在坐标系$\{O;\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1\}$中可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}=\cos\alpha_1\boldsymbol{i}_1+\cos\alpha_2\boldsymbol{j}_1+\cos\alpha_3\boldsymbol{k}_1, \\ \boldsymbol{j}=\cos\beta_1\boldsymbol{i}_1+\cos\beta_2\boldsymbol{j}_1+\cos\beta_3\boldsymbol{k}_1, \\ \boldsymbol{k}=\cos\gamma_1\boldsymbol{i}_1+\cos\gamma_2\boldsymbol{j}_1+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}_1. \end{cases} \tag{1.116}$$

设 M 为空间任一点,它在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标为$(x, y, z)$,它在坐标系$\{O;\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1\}$中的坐标为$(x_1, y_1, z_1)$. 由式(1.115),有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x_1\boldsymbol{i}_1+y_1\boldsymbol{j}_1+z_1\boldsymbol{k}_1 \\ &=x_1(\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k}) \\ &\quad+y_1(\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k}) \\ &\quad+z_1(\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}). \end{aligned}$$

由此可得坐标(x, y, z)与(x_1, y_1, z_1)之间的关系式如下:

$$\begin{cases} x=x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\alpha_2+z_1\cos\alpha_3, \\ y=x_1\cos\beta_1+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\beta_3, \\ z=x_1\cos\gamma_1+y_1\cos\gamma_2+z_1\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{1.117}$$

同样,由式(1.116)还可得

$$\begin{cases} x_1=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1, \\ y_1=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2, \\ z_1=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{1.118}$$

式(1.117)和(1.118)都称为旋转公式.

3° 一般坐标变换 设空间有两个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{O_1;\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1\}$, M 为空间任一点,它在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{O_1;\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1\}$中的坐标分别为$(x, y, z)$和$(x_1, y_1, z_1)$, 点 O_1 在坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标以及坐标向量之间的夹角都与前面的假设相同. 现要求(x, y, z)与(x_1, y_1, z_1)之间的关系式.

我们再考虑一个直角坐标系$\{O_1;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$, 设点 M 在此坐标系中的坐标为(x', y', z'). 由式(1.114),有

$$\begin{cases} x=a+x', \\ y=b+y', \\ z=c+z'. \end{cases} \tag{1.119}$$

再按式(1.117)，可得到(x', y', z')与(x_1, y_1, z_1)的关系式如下：

$$\begin{cases} x'=x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\alpha_2+z_1\cos\alpha_3, \\ y'=x_1\cos\beta_1+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\beta_3, \\ z'=x_1\cos\gamma_1+y_1\cos\gamma_2+z_1\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{1.120}$$

最后将上式代入式(1.119)，便得(x, y, z)与(x_1, y_1, z_1)的关系式：

$$\begin{cases} x=a+x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\alpha_2+z_1\cos\alpha_3, \\ y=b+x_1\cos\beta_1+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\beta_3, \\ z=c+x_1\cos\gamma_1+y_1\cos\gamma_2+z_1\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{1.121}$$

我们称此式为一般坐标变换公式.

例1 已知两个直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$和$\{O_1; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$之间的关系如下：

$$\overrightarrow{OO_1}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},$$

$$\alpha_1=0, \quad \beta_1=\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}, \quad \beta_2=\frac{\pi}{4}, \quad \gamma_2=\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_3=\frac{\pi}{2}, \quad \beta_3=\frac{3\pi}{4}, \quad \gamma_3=\frac{\pi}{4}.$$

并已知曲面在$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$中的方程为

$$3x^2-y^2-z^2+6yz-6x+6y-2z-2=0. \tag{1.122}$$

试求此曲面在坐标系$\{O_1; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$中的方程.

解 由式(1.121)，有

$$\begin{cases} x=1+x_1, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ z=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_1. \end{cases}$$

把它代入方程(1.122)，整理后可得

$$3x_1^2+2y_1^2-4z_1^2-4=0.$$

把它和式(1.108)比较，便知此曲面是一个单叶双曲面.

2*. 欧拉角

我们将通过下面的例题导出欧拉(Euler)角的概念.

例2 设有一半径为1的球体. 以球心为坐标原点取一个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，球面上就得到三点$A$、$B$、$C$，使得$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$. 现将球体连续进行三次旋转. 第一次球体绕$OC$轴旋转一个$\psi$角($A$、$B$、$C$为球面上的点，它们将随球体一起旋转)；第二次球体绕OA轴旋转一个θ角；第三次球体绕OC轴旋转一个φ角. 试求经过这三次旋转后向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的坐标表示.

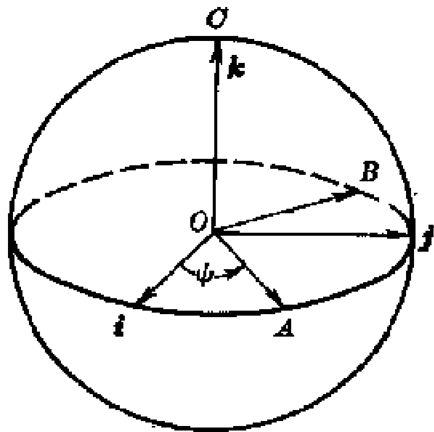


图 1.53

解 先考虑经过第一次旋转后向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$在$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中的坐标表示. 若以$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{j}_2$、$\boldsymbol{k}_2$分别表示这时的$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，显然$\{O;\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{k}_2\}$也是一个直角坐标系. 易知这时$\overrightarrow{OA}$与坐标向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为$\psi$、$\frac{\pi}{2}-\psi$、$\frac{\pi}{2}$；$\overrightarrow{OB}$与向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的夹角分别为$\frac{\pi}{2}+\psi$、$\psi$、$\frac{\pi}{2}$；而$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$(见图1.53). 按式(1.115)便有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_2=\cos\psi\boldsymbol{i}+\sin\psi\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}_2=-\sin\psi\boldsymbol{i}+\cos\psi\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}.\end{cases}\qquad(1.123)$$

再考虑经过第二次旋转后向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{k}_2\}$中的坐标. 若以$\boldsymbol{i}_3$、$\boldsymbol{j}_3$、$\boldsymbol{k}_3$分别表示这时的$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$，显然$\{O;\boldsymbol{i}_3,\boldsymbol{j}_3,\boldsymbol{k}_3\}$也是一个直角坐标系. 于是类似可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{i}_2,\\ \boldsymbol{j}_3=\cos\theta\boldsymbol{j}_2+\sin\theta\boldsymbol{k}_2,\\ \boldsymbol{k}_3=-\sin\theta\boldsymbol{j}_2+\cos\theta\boldsymbol{k}_2.\end{cases}\qquad(1.124)$$

最后考虑经过第三次旋转后$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$在$\{O;\boldsymbol{i}_3,\ \boldsymbol{j}_3,\ \boldsymbol{k}_3\}$中的坐标. 若以$\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{j}_1,\ \boldsymbol{k}_1$分别表示这时的$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$, 显然$\{O;\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{j}_1,\ \boldsymbol{k}_1\}$也是一个直角坐标系. 于是类似可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_1=\cos\varphi\boldsymbol{i}_3+\sin\varphi\boldsymbol{j}_3,\\ \boldsymbol{j}_1=-\sin\varphi\boldsymbol{i}_3+\cos\varphi\boldsymbol{j}_3,\\ \boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_3.\end{cases}\tag{1.125}$$

先将式(1.123)代入式(1.124), 再将所得的结果代入式(1.125), 就得到下列结果:

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_1=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{i}+(\sin\psi\cos\varphi\\ \qquad+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}_1=-(\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(-\sin\psi\sin\varphi\\ \qquad+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\boldsymbol{j}+\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}_1=\sin\psi\sin\theta\boldsymbol{i}-\cos\psi\sin\theta\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}.\end{cases}\tag{1.126}$$

它们就是我们所要求的$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的坐标表示.

设$\{O;\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$和$\{O;\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{j}_1,\ \boldsymbol{k}_1\}$是具有相同坐标原点的两个直角坐标系. 在旋转变换公式中用到了$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$、$\boldsymbol{k}_1$的方向余弦的九个参数: $\cos\alpha_1$、$\cos\beta_1$、$\cos\gamma_1$、$\cos\alpha_2$、$\cos\beta_2$、$\cos\gamma_2$、$\cos\alpha_3$、$\cos\beta_3$、$\cos\gamma_3$. 在此九个参数中实际上只有三个参数是独立的. 因为由

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=1,\ \boldsymbol{j}_1\cdot\boldsymbol{j}_1=1,\ \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_1=1,$$
$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{j}_1=0,\ \boldsymbol{j}_1\cdot\boldsymbol{k}_1=0,\ \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=0,$$

便可得到关于这些参数的六个方程.

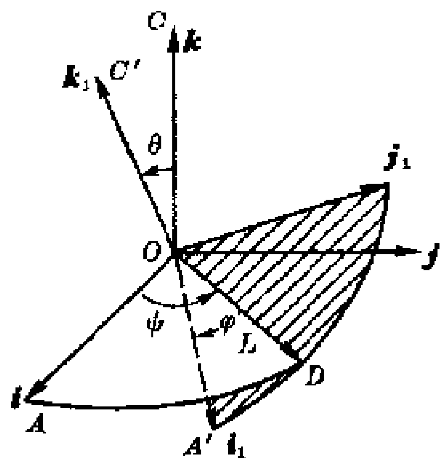


图 1.54

从例2我们看到对于这两个直角坐标系, 我们还可以选取ψ、θ、φ三个旋转角作为独立参数. 在空间取五个点A、A'、C、C'、D, 使得$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{i}_1$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{k}_1$, $\overrightarrow{OD}$为坐标面xOy与x_1Oy_1的交线上的一个单位向量(如果两坐标面重合, 则$\overrightarrow{OD}$应是xOy坐标面上的单位向量). ψ表示以OC

为轴把 OA 旋转到 OD 的角度；θ 表示以 OD 为轴把 OC 旋转到 OC' 的角度；φ 表示以 OC' 为轴把 OD 旋转到 OA' 的角度．逆时针旋转角度为正，顺时针旋转角度为负(参看图 1.54)．从例 2 中易知经过相应的三次旋转就从$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$得到$\{O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$．比较式(1.115)和(1.126)，便可得到下列结果：

$$\begin{cases}\cos\alpha_1=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi,\\ \cos\beta_1=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi,\\ \cos\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi,\\ \cos\alpha_2=-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi,\\ \cos\beta_2=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi,\\ \cos\gamma_2=\sin\theta\cos\varphi,\\ \cos\alpha_3=\sin\psi\sin\theta,\\ \cos\beta_3=-\cos\psi\sin\theta,\\ \cos\gamma_3=\cos\theta.\end{cases}\tag{1.127}$$

因此只要知道坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$和$\{O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$之间的 ψ、θ、φ 这三个角就可以进行旋转变换．ψ、θ、φ 这三个角就称为欧拉角．由式(1.114)知道坐标系的平移变换依赖于三个参数 a、b、c，而现在又知道坐标系的旋转变换依赖于三个参数 ψ、θ、φ．因此一般坐标变换依赖于这六个参数．它反映了客观世界中刚体运动共有六个自由度这一客观情况．

习　题

§1

1．设 $OABC$ 为一个平行四边形，其中边 $OA /\!/ BC$，$AB /\!/ OC$．若向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试求向量 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{CA}$．

2．设 $OABC$ 为一个梯形，其中边 $OA /\!/ BC$，E、F 分别为腰 AB、OC 的中点．若向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{d}$，$\overrightarrow{FE}=\boldsymbol{e}$，试求向量 $\overrightarrow{CB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$．

3．设 A、B、C、D 为空间四个点，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{d}$，又 E、F 分别为线段 AC 和 BD 的中点．试求向量 $\overrightarrow{EF}$．

4．设 $ABCD$ 为一个梯形，边 $AD /\!/ BC$，E 为梯形对角线的交点，O 为空间某一点，已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，试求向量 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、

$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{DC}$.

5. (1) 指出下列各点中哪些点是坐标面上的点，哪些点又是坐标轴上的点：

$A(-3, 0, -3)$, $B(1, -1, 0)$, $C(0, -1, 0)$, $D(\sqrt{2}, -1, 1)$,
$E(-2, 2, 2)$, $F(0, 0, 0)$, $G(-\sqrt{2}, 0, 0)$, $H(\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(2) 指出下列各点在哪一卦限中：

$A(2, 1, -5)$, $B(2, -1, 5)$, $C(-1, -1, -1)$, $D(2, -2, -2)$.

6. 试求下列向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 以及与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$：

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;　　(2) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$;　　(4) $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

7. 在直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 中，已知点 A 和 B 的坐标分别为 $(-1, 2, 0)$ 和 $(-3, 4, 5)$. 试求：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$;　　(2) 向量 $\overrightarrow{BA}$;

(3) A、B 间的距离；　　(4) A、B 连线的中点坐标.

8. 已知点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1, -1, -1)$, $(2, 0, 3)$, $(0, -1, 0)$, $ABDC$ 为以 AB、AC 为邻边的平行四边形，试求点 D 的坐标.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$, 试求：

(1) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;　　(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;　　(4) $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, 试求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　　(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;

(3) $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;　　(4) $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$;

(5) $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦；　　(6) $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, 试求平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

12. 对于下面所给向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 判断 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 是否成立：

(1) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

13. 请说明下列结论是否成立：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

14. 试证明向量 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直.

15. 已知 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, 试求一个既与 $\boldsymbol{a}$ 垂直又与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的非零向量.

16. 已知点 A、B、C、D 的坐标分别为$(1, -2, 3)$, $(4, -4, 3)$, $(2, 4, 3)$, $(8, 6, 6)$，试求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; (2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$;

(3) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$; (4) $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$;

(5) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AB}$; (6) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}$;

(7) $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$; (8) $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$.

17. 若$|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$，试问下列结论是否成立：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$;

(2) $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$;

(3) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

18. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. 试求：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$; (4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$;

(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$; (6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}$.

19. 已知点 A、B、C 的坐标分别为$(1, -1, 2)$、$(3, 3, 1)$、$(3, 1, 3)$. 求三角形 ABC 的面积.

20. 已知点 A、B、C、D 的坐标分别为$(-1, 2, 4)$、$(6, 3, 2)$、$(1, 4, -1)$、$(-1, -2, 3)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

§ 2

1. 设点 A、B、C、D 的坐标分别为$(4, 1, 4)$、$(2, -1, 8)$、$(7, -1, 2)$、$(0, 0, -1)$，问此四点中哪些点在平面 $2x-3y-z-1=0$ 上.

2. 设向量 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，试求以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量，且使下列点 M_0 在其上的平面 π 的方程：

(1) $M_0(1, -2, 3)$, (2) $M_0(0, 0, 0)$.

3. 试求过点 $M_0(1, -3, 0)$且以下列向量 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面方程：

(1) $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; (2) $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}$; (4) $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{k}$.

4. 判别下列平面与哪些坐标轴垂直，与哪些坐标轴平行：

(1) $2x-3y+20=0$; (2) $3y+2z=0$;

(3) $x-4z+1=0$; (4) $-3z+4=0$.

5. 试求过下列三点的平面方程：

(1) $A(2, 3, 0)$, $B(-2, -3, 4)$, $C(0, 6, 0)$;

(2) $A(4, 2, 0)$, $B(-1, 0, -1)$, $C(0, 3, 4)$;

(3) $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(-1,\ 4,\ 2)$, $C(0,\ 1,\ -1)$.

6. 求过点 $M_0(1,\ -1,\ 1)$，且既垂直于平面 $x-y+z+1=0$，又垂直于平面 $2x+y+z-1=0$ 的平面方程.

7. 求过点 $A(2,\ 0,\ -1)$，且平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$ 的平面方程.

8. 求过点 $A(-1,\ 1,\ 1)$、$B(0,\ 2,\ -1)$，且平行于向量 $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的平面方程.

9. 求点 $M(1,\ 2,\ 1)$到下列平面的距离:

(1) $x+2y+2z-10=0$;　　(2) $-x-3y+4z-1=0$.

10. 试在 z 轴上求一点，使它到平面 $12x+9y-20z-19=0$ 的距离等于它到平面 $16x-12y+15z-9=0$ 的距离.

11. 求过下列两点的直线方程:

(1) $(4,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)$;　　(2) $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ -1,\ -1)$;

(3) $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ -2,\ 3)$;　　(4) $(1,\ 2,\ 0)$, $(-3,\ 4,\ 0)$.

12. 把下列直线方程化为标准方程:

(1) $\begin{cases} x+y+z+5=0, \\ x-2y+4z+6=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y+5=0, \\ 2y+z+8=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+3y-z+6=0. \end{cases}$

13. 求过点$(3,\ 0,\ -1)$且平行于直线

$$\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$$

的直线方程.

14. 求直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z}{3}$ 和平面 $2x-y-2z-1=0$ 的交点.

15. 求过点$(3,\ 0,\ 1)$且垂直于下列平面的直线方程:

(1) $3x-y+2z+4=0$;　　(2) $2x+3z-1=0$;

(3) $6y-z-3=0$;　　(4) $5x-1=0$.

16. 试求直线

$$\begin{cases} 3x+y-z+1=0, \\ 2x-y+4z-2=0 \end{cases}$$

的方向向量与平面 $x-5y-z+6=0$ 的法向量夹角的正弦.

17. 试求点$(1,\ 2,\ 3)$到直线 $x=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.

18. 已知 A、B、C 三点的坐标分别为$(2,\ -1,\ 0)$、$(-3,\ 1,\ 2)$、$(3,\ 0,\ 2)$. 试

求三角形 ABC 的边 BC 上高 AD 的直线方程.

19. 已知直线 L 的方程为

$$\begin{cases} 2x-y+2z+3=0, \\ x-3y-4=0, \end{cases}$$

点 M_0 的坐标为 $(-1, 0, 1)$. 试求:

(1) 通过点 M_0 和直线 L 的平面 π;

(2) 通过直线 L 的平面 π, 使点 M_0 到 π 的距离为最大.

20*. 证明平面:

$$\pi_1:\ 2x-y+1=0,$$
$$\pi_2:\ x+2y+z+2=0,$$
$$\pi_3:\ 3x+y+z+3=0$$

属于同一平面束, 并求这平面束里分别通过点 $M_1(1, 0, 1)$、$M_2(-1, 2, 1)$、$M_3(0, 0, 0)$ 的各平面方程.

§ 3

1. 试求下列向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t=0$ 时所表示的向量:

(1) $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=e^t\boldsymbol{i}-e^{-t}\boldsymbol{j}+(t+1)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{r}(t)=\ln(1+t)\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k}$.

2. 试求下列向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的导数 $\boldsymbol{r}'(t)$:

(1) $\boldsymbol{r}(t)=6\sin 2t\boldsymbol{i}+6\cos 2t\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=e^t\cos t\boldsymbol{i}+e^t\sin t\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{r}(t)=3t\cos t\boldsymbol{i}+3t\sin t\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$.

3. 试求下列曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 所相应的点处的切线方程和法平面方程:

(1) $\boldsymbol{r}(t)=e^t\boldsymbol{i}+e^t\sin t\boldsymbol{j}+e^t\cos t\,\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+(t^2-1)\boldsymbol{k}$.

4. 若 $\boldsymbol{a}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{k}$, $f(t)=t^3-3$, 试求:

(1) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{b}(t))$;　　(2) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}(t))$;

(3) $\frac{d}{dt}(f(t)\boldsymbol{a}(t))$;　　(4) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))$.

5. 若 $\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$、$\boldsymbol{c}(t)$ 都是可导的向量函数, 试推导关于 $\frac{d}{dt}((\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{b}(t))\cdot\boldsymbol{c}(t))$ 的公式.

6. 试求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=at\boldsymbol{i}+bt^2\boldsymbol{j}+ct^3\boldsymbol{k}$ 在 $t=1$ 所相应的点处的切线和法平

面的方程.

7*. 试求下列曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率 $k(t)$ 和挠率 $\tau(t)$:

(1) $\boldsymbol{r}(t)=a\operatorname{ch}t\boldsymbol{i}+a\operatorname{sh}t\boldsymbol{j}+at\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=\cos^3t\boldsymbol{i}+\sin^3t\boldsymbol{j}+\cos2t\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{r}(t)=a(3t-t^3)\boldsymbol{i}+3at^2\boldsymbol{j}+a(3t+t^3)\boldsymbol{k}$.

8*. 对曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 试证明下列 Frenet 公式:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=k\boldsymbol{N},\quad \frac{d\boldsymbol{B}}{ds}=-\tau\boldsymbol{N},\quad \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}=\tau\boldsymbol{B}-k\boldsymbol{T}.$$

9. 质点以等角速度 ω, 按逆时针方向绕 z 轴作圆周运动, 其运动方程为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\boldsymbol{j}.$$

试求质点在时刻 t 时的加速度 $\boldsymbol{a}(t)$.

10. 指出下列曲面中哪些是柱面, 它们的母线与哪个坐标向量平行:

(1) $x+y=1$;　　(2) $y=0$;

(3) $y=\sin x$;　　(4) $z^2+y^2-2ay=0\quad(a>0)$.

11. 指出下列曲面中哪些是旋转曲面, 它们是怎样形成的:

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$;　　(2) $x^2+2y^2-2z^2=1$;

(3) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$;　　(4) $2y^2-3x-2z^2$;

(5) $x^2-y^2-z^2=4$;　　(6) $x^2-y^2=4z$.

12. 试求 xOy 坐标面上的平面曲线 $y=\sin x$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的方程.

13. 试求 xOy 坐标面上的平面曲线 $x^2+y^2-4x+3=0$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面的方程.

14. 试建立准线为曲面 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线, 母线平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的柱面方程以及此柱面在 xOy 平面上的截口曲线的方程.

15. 试建立准线为曲面 $7-z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+2y+z=1$ 的交线, 母线平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的柱面方程.

16. 试求圆:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36,\\ 3x+y-z=9\end{cases}$$

的圆心与半径.

17. 试描绘下列各组曲面所围成的立体图形:

(1) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

(2) $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

(3) $x=y$, $y=2x$, $z=0$, $x+z=6$.

§ 4

1. 试求平面 $x+y+z=0$ 和曲面 $yz+zx+xy+a^2=0$ 经旋转变换:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_1, \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-\frac{2}{\sqrt{6}}z_1, \\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_1 \end{cases}$$

后,在直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$ 中的方程, 并进一步说明曲面与平面的交线恰为一个半径为 $\sqrt{2}a$ 的圆.

2. 已知直角坐标变换为:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'-1, \\ y=\frac{1}{\sqrt{14}}x'-\frac{3}{\sqrt{14}}y'+\frac{2}{\sqrt{14}}z'+1, \\ z=\frac{5}{\sqrt{42}}x'-\frac{1}{\sqrt{42}}y'-\frac{4}{\sqrt{42}}z'. \end{cases}$$

(1) 求平面:

$$x+y+z+1=0$$

在新坐标系下的方程.

(2) 求直线:

$$\begin{cases} y=2x+1, \\ y=3z-5 \end{cases}$$

在新坐标系下的方程.

(3) 求球面:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

在新坐标系下的方程.

3. 求坐标平移变换,使下列球面方程:

(1) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-11=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2-10x+6z-35=0$;

(3) $x^2+y^2+z^2-8y+4z-20=0$,

化为

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2$$

的形式.

第二章　多元函数微分学

§1　多元函数的概念

1. 多元函数的定义

本章将以二元函数作为多元函数的代表进行讨论，其结果都很容易移到一般 n 元函数上.

一元函数 $y=f(x)$ 的定义域一般是 x 轴上的区间，而二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域一般是 xOy 坐标平面上的区域. 所谓区域，指的是由一条曲线或几条曲线所围成的平面上的一部分. 例如，由三条直线围成的三角形区域；由圆周围成的圆形区域；由 x 轴和 y 轴围成的第1象限等等. 如果区域可被包含在一个以原点为中心、半径充分大的一个圆形区域内，则称此区域是有界的，否则就称为是无界的.

设 $M_0(x_0, y_0)$ 为 R^2 空间中任一点，δ 为一个正数，则 R^2 中的点集 $\{M(x,y) \mid |\overrightarrow{M_0M}|<\delta\}$ 称为 R^2 空间中点 M_0 的 δ 邻域，记为 $N_\delta(M_0)$（见图2.1）.

若 D 为 R^2 的点集，M_0 为 R^2 中的一点. 如果存在正数 δ，使得 M_0 的 δ 邻域 $N_\delta(M_0)\subset D$，则称点 M_0 为点集 D 的内点；如果存在正数 δ，使得 $D\cap N_\delta(M_0)=\varnothing$，则称点 M_0 为点集 D 的外点；如果点 M_0 的任一 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$ 中总既含有 D 的内点又含有 D 的外点，则称点 M_0 为点集 D 的边界点（见图2.2）.

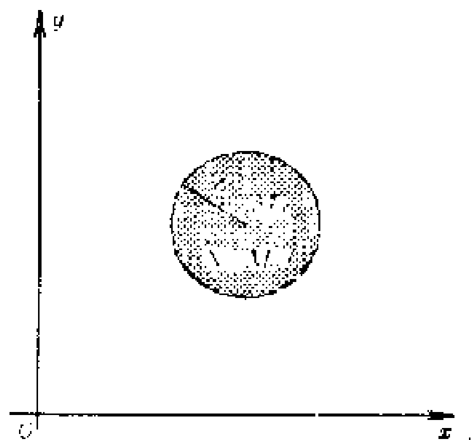


图 2.1

如果点集 D 的每一点都是 D 的内点，则称 D 为一个开集. 例如，点集 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2<1\}$

就是一个开集．如果点集 D 的任一边界点都属于 D，则称 D 为一个闭集．例如，点集 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 就是一个闭集．点集 D 的全体边界点所组成的点集称为 D 的边界．如果 D 是一个开集就称为开区域，简称区域；如果是一个闭集就称为一个闭区域．

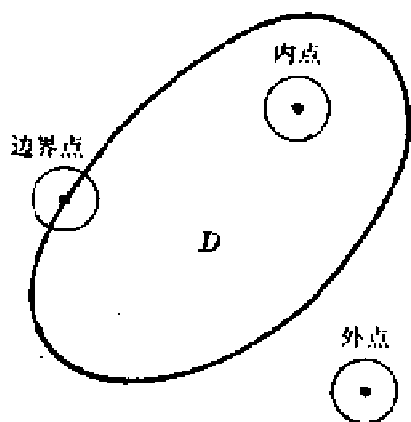


图 2.2

一元函数 $y=f(x)$ 反映了在只含有两个变量的变化过程中，这两个变量之间的依赖关系，然而许多实际问题的变化过程中往往含有多个变量．为了研究多个变量之间的依赖关系，需要引进多元函数的概念．例如，圆柱体的体积 V 的值取决于底圆半径 R 和高 H，它们之间的依赖关系可写成

$$V=\pi R^2H.$$

因此任一组 $R>0$，$H>0$ 的数值就决定了一个 V 的数值．换句话说，R^2 空间中第Ⅰ象限中任一点 (R, H) 都对应到 R^1 空间中的一点 V．下面我们先给出二元函数的定义．

定义 2.1 设 D 为 R^2 空间的一个点集，D 中任一点 (x, y) 都对应于唯一确定的数 z．这种从 $D\subset R^2$ 到 R^1 的映射 f 称为一个二元函数，记为 $z=f(x, y)$，称 D 为这个函数的定义域．

如同一元函数一样，如果在给定二元函数表达式中对定义域没有作附加说明，则此二元函数的定义域就应理解为一切使表达式有意义的点所组成的点集．如果具有附加说明，则它的定义域就还应考虑所附加的说明条件．

例 1 考察下列各个函数的定义域．

(1) $z=\ln(x+y)$ 的定义域 $D=\{(x, y)|x+y>0\}$；

(2) $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(3) $z=\dfrac{1}{x+y}(x>0)$ 的定义域 $D=\{(x, y)|x+y\neq 0, 且 x>0\}$．

如果定义 2.1 的 D 为 R^n 空间中的点集，f 为 D 到 R^1 的映

射，则称 f 为一个 n 元函数，记为 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称 D 为这个函数的定义域.

2. 函数的极限与连续

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某一 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$ 内除 M_0 以外的所有点处都是有定义的（$z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可以有定义，也可以没有定义）．我们考察动点 $M(x, y)$ 在邻域 $N_\delta(M_0)$ 内趋向点 M_0（但动点 M 始终没有到达过点 M_0 处）时，函数 $f(x, y)$ 的变化情况.

如果存在实数 A，使得当 $M(x, y)$ 与 $M_0(x_0, y_0)$ 充分接近时，函数值 $f(x, y)$ 与 A 能够达到任何预先要求的接近程度，我们就称函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的极限为 A．其分析定义如下：

定义 2.2 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某一 δ_1 邻域 $N_{\delta_1}(M_0)$ 内除 M_0 以外的所有点处都有定义，A 为一个实数．如果对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 $\delta\,(\delta\leq\delta_1)$，使得当 (x, y) 满足不等式

$$0<\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}<\delta$$

时，相应的函数值 $f(x, y)$ 一定满足不等式

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon, \tag{2.1}$$

则称 A 为函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A, \text{ 或 } \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A. \tag{2.2}$$

例 2 试求函数极限 $\lim\limits_{(x, y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 因为 $2xy\leqslant x^2+y^2$，故

$$\left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\sqrt{x^2-y^2}.$$

在点 $O(0, 0)$ 的任一 δ 邻域中，除 $O(0, 0)$ 这点外，函数 $z=\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都有定义．所以对于任一给定的实数 $\varepsilon>0$，我们只要取 $\delta=\varepsilon$，这时当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$（即点 (x, y) 为 $N_\delta(O)$ 中任一非 $O(0, 0)$ 的点）时，下列不等式成立：

$$\left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon.$$

由此便知，
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

例 3　试求函数 $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处的极限.

解　函数 $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 在除点(0, 0)外的每点处都有定义. 显然，对于满足条件 $x\neq 0$, $x=y$ 的任一点 (x, y)，它的函数值 $f(x, y)=1$; 对于满足条件 $x\neq 0$, $x=-y$ 的任一点 (x, y)，它的函数值 $f(x, y)=-1$. 而在点 $O(0, 0)$ 的任一 δ 邻域内，总既存在点 (x_1, y_1)，满足条件 $x_1\neq 0$, $x_1=y_1$，其函数值 $f(x_1, y_1)=1$，又存在点 (x_2, y_2)，满足条件 $x_2\neq 0$, $x_2=-y_2$，其函数值 $f(x_2, y_2)=-1$. 因此函数 $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处的极限不存在.

这个例子告诉我们，如果仅知道当动点 $M(x, y)$ 在函数 $z=f(x, y)$ 的定义域内沿着某条特定的路径接近点 $M_0(x_0, y_0)$ 时，函数值 $f(x, y)$ 趋向于某一确定的值(例如，例 3 中动点 $M(x, y)$ 沿直线 $y=x$ 接近点 $O(0, 0)$ 时，函数值趋向于 1)，我们还不能断定函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处极限是否存在. 只有当动点 $M(x, y)$ 在 D 内以任何方式接近点 $M_0(x_0, y_0)$ 时，函数值都趋向于同一数值 A，这时函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的极限才存在且等于 A.

如同一元函数那样，有了二元函数的极限概念后就可以给出二元函数连续性的定义.

定义 2.3　若函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处有定义，且

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x, y)=f(x_0, y_0),\tag{2.3}$$

则称函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是连续的. 如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内每一点处都是连续的，则称函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上连续.

例 4　考察下列各函数在点(0, 0)处的连续性:

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{当} \quad x^2+y^2=0;\end{cases}$$

$$g(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 1, & \text{当} \quad x^2+y^2=0;\end{cases}$$

$$h(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{当} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{当} \quad x^2+y^2=0.\end{cases}$$

解 从例3知 $h(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处极限不存在，因此 $h(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续. 从例2知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续，而 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续.

类似于一元函数，我们同样可以得到关于二元函数连续性的下述结论：

(1) 设 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 都是在 (x_0, y_0) 处连续的函数，则函数 $f(x, y)+g(x, y)$、$f(x, y)-g(x, y)$、$f(x, y)g(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处也是连续的. 如果再加上 $g(x_0, y_0)\neq 0$ 的条件，则函数 $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ 在 (x_0, y_0) 处也是连续的.

(2) 设 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 都是在 (x_0, y_0) 处连续的函数，且 $u_0=u(x_0, y_0)$，$v_0=v(x_0, y_0)$；又函数 $z=f(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 处是连续的，则复合函数 $f[u(x, y), v(x, y)]$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

(3) 设函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 D 中必存在点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，使得 $f(x_1, y_1)$ 和 $f(x_2, y_2)$ 分别为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值和最大值.

(4) 设函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，M_1 和 M_2 分别为 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值和最大值，m 为满足 $M_1\leqslant m\leqslant M_2$ 的任一实数，则在 D 中必存在一点 (x^*, y^*)，使得 $f(x^*, y^*)=m$.

(5)* 设函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续. 即对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，

使得对于 D 内任意两点 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$，只要 $|\overrightarrow{M_1M_2}|<\delta$，下列不等式总成立：

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon.$$

§2　偏导数与全微分

1. 偏导数

在讨论一元函数时，我们曾用函数 $y=f(x)$ 在 x 处的函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与自变量增量 Δx 之比的极限（即 $y=f(x)$ 在 x 处的导数 $f'(x)$）来刻划函数 $y=f(x)$ 在 x 处的变化率。如果二元函数 $z=f(x, y)$ 的自变量中有一个取某个定值不变（例如 $y=y_0$），就可以考察所得一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在 x_0 处的变化率，这就是我们要研究的二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的相对变化率。例如，当圆柱体的高 H 取某个定值 H_0 时，体积 V 就成了底半径 R 的一元函数：$V=\pi H_0R^2$。易知此时体积 V 关于底半径 R 在 R_0 处的变化率为 $2\pi H_0R_0$，即函数 $V=\pi R^2H$ 在 (R_0, H_0) 处关于 R 的相对变化率为 $2\pi H_0R_0$。为了刻划这种相对变化率，我们引进下面的偏导数概念。

定义 2.4　设函数 $z=f(x, y)$ 定义在区域 D 上，点 (x_0, y_0) 为 D 的一个内点，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2.4}$$

存在，则称它为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于自变量 x 的偏导数，记为 $f_x(x_0, y_0)$，或 $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或 $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

类似地，函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于自变量 y 的偏导数由下列极限定义：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \tag{2.5}$$

相应地记为 $f_y(x_0, y_0)$ 或 $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ 等形式。如果函数 $z=f(x, y)$

在区域 D 的每一点 (x, y) 上都有偏导数存在，则这些偏导数在 D 上也是 x、y 的函数，分别记为 $f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$，或 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 等形式.

从式(2.4)可见，把 $f(x, y_0)$ 作为 x 的一元函数，求它在 x_0 处关于 x 的导数，即得二元函数在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$. 一般地，把 $f(x, y)$ 中的变量 y 暂时看作常数，然后关于 x 求偏导，就得偏导数 $f_x(x, y)$. 同样，把 $f(x, y)$ 中的变量 x 看作常数，然后关于 y 求偏导，就得偏导数 $f_y(x, y)$. 于是可以利用一元函数的求导公式和运算法则进行求偏导数的运算.

例 1 设 $f(x, y)=x^2+xy+y^3$，试求 $f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$、$f_x(1, 0)$ 和 $f_y(0, 1)$.

解 把 y 看作常数，关于 x 求导，便得

$$f_x(x, y)=2x+y.$$

因此 $f_x(1, 0)=2$.

把 x 看作常数，关于 y 求导，便得

$$f_y(x, y)=x+3y^2.$$

因此 $f_y(0, 1)=3$.

例 2 试求函数 $z=x^y$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 把 y 看作常数，关于 x 求导便得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}.$$

把 x 看作常数，关于 y 求导便得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

例 3 试求函数 $u=\ln(x+y^2+z^3)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 把 y 和 z 都看作常数，关于 x 求导，便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2+z^3}.$$

把 z 和 x 都看作常数，关于 y 求导，便得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2+z^3}.$$

把 x 和 y 都看作常数，关于 z 求导，便得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}.$$

下面阐述偏导数的几何意义. 一元函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，即为平面曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线 L 的斜率. 换句话说，在平面直角坐标系 $\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 内，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{i}+f'(x_0)\boldsymbol{j}$ 构成切线 L 的一个方向向量. 定义在区域 D 上的二元函数 $z=f(x,\ y)$ 的几何图形为一个空间曲面. 设 $(x_0,\ y_0)$ 为 D 的一个内点，考察以平面 $y=y_0$ 去截此曲面所得的截口曲线

$$\begin{cases}z=f(x,\ y),\\ y=y_0.\end{cases}$$

它是平面 $y=y_0$ 上的一条平面曲线 $z=f(x,\ y_0)$（见图 2.3）. 此平面曲线在 $x=x_0$ 处的切线 l_x 的斜率即为 $f_x(x_0,\ y_0)$，换句话说，向量

$$\boldsymbol{T}_x=\boldsymbol{i}+f_x(x_0,\ y_0)\boldsymbol{k} \tag{2.6}$$

为空间直线 l_x 上的一个方向向量. 同样，$f_y(x_0,\ y_0)$ 即为平面 $x=x_0$ 上的平面曲线 $z=f(x_0,\ y)$ 在 $y=y_0$ 处切线 l_y 的斜率，而向量

$$\boldsymbol{T}_y=\boldsymbol{j}+f_y(x_0,\ y_0)\boldsymbol{k} \tag{2.7}$$

为空间直线 l_y 上的一个方向向量.

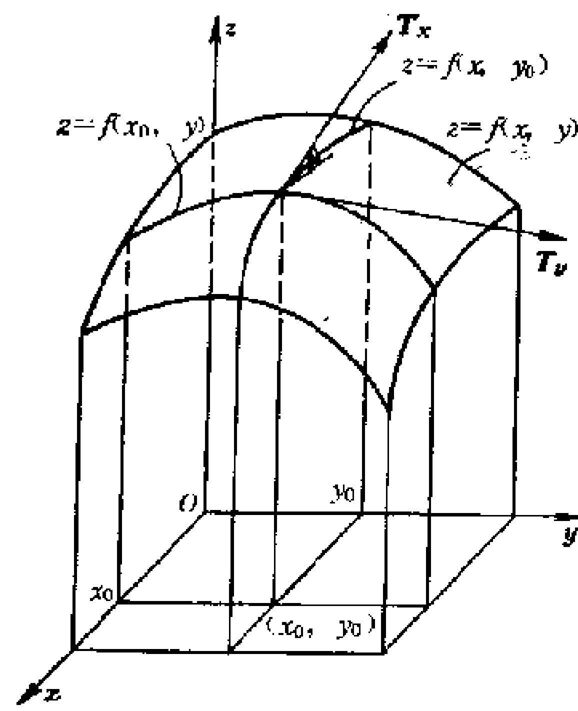


图 2.3

2. 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 在 x 处的微分 $dy=f'(x)dx$ 刻划了当自变

量的增量趋于零时函数增量与自变量增量之间的关系. 下面我们将讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 在自变量的增量都趋于零时函数增量与自变量增量之间的关系.

设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 (x_0, y_0) 为 D 的内点, Δx 和 Δy 分别为自变量 x 和 y 的增量, 且点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 也在 D 内, 则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) \tag{2.8}$$

称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 Δx 和 Δy 的**全增量**, 下面进一步给出全微分的定义.

定义 2.5 设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 (x_0, y_0) 为 D 的一个内点. 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 Δx 和 Δy 的全增量都可写成下列形式:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}), \tag{2.9}$$

其中 A、B 只与 (x_0, y_0) 有关而与 Δx、Δy 无关, 则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是**可微的**, 并称 $A\,\Delta x+B\,\Delta y$ 为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的**全微分**, 记为 dz 或 df. 即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 的每点处都是可微的, 则称函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上可微. 若函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则由式(2.9)可知, 当 $\Delta x\to 0$ 和 $\Delta y\to 0$ 时, 也有 $\Delta z\to 0$, 即 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\to f(x_0, y_0)$. 于是可有下面的结论:

定理 2.1 若函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是可微的, 则 $f(x, y)$ 在该点处也一定是连续的.

下面两个定理将阐明函数 $z=f(x, y)$ 的全微分 dz 与它的两个偏导数 $f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$ 之间的关系.

定理 2.2 若函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是可微的, 则 $f(x, y)$ 在该点处的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$、$f_y(x_0, y_0)$ 也都存在, 且在 (x_0, y_0) 处的全微分有如下表达式:

$$dz=f_x(x_0, y_0)\Delta x+f_y(x_0, y_0)\Delta y. \tag{2.10}$$

证明 式(2.8)、(2.9)当取 $\Delta y=0$ 时, 即为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

故当 $\Delta x\neq 0$ 时，便有

$$A=\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$，就得到

$$A=f_x(x_0,\ y_0).$$

同样可有

$$B=f_y(x_0,\ y_0).$$

所以函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处的偏导数 $f_x(x_0,\ y_0)$、$f_y(x_0,\ y_0)$都存在，且$(x_0,\ y_0)$处的全微分即为

$$dz=f_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y(x_0,\ y_0)\Delta y.$$

定理证毕. ▌

特别地，当 $f(x,\ y)=x$ 时，$f_x(x,\ y)=1$，$f_y(x,\ y)=0$，故有 $dx=\Delta x$. 同理，当 $f(x,\ y)=y$ 时可得到 $dy=\Delta y$. 因此自变量的微分也就是它的增量. 所以当函数 $z=f(x,y)$在$(x,\ y)$处可微时，它在$(x,\ y)$处的全微分可写成下列形式：

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.11}$$

定理2.3 设函数 $z=f(x,\ y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点$(x_0,\ y_0)$的某一 δ 邻域内都存在，且偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处都是连续的，则函数 $z=f(x,\ y)$在该点处是可微的.

证明 函数 $z=f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处的全增量 Δz 可写成

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)\\&=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0+\Delta y)\\&\quad+f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0).\end{aligned}$$

因为偏导数 f_x 和 f_y 在$(x_0,\ y_0)$的某 δ 邻域内均存在，应用中值定理上式可写成为

$$\begin{aligned}\Delta z=&f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)\Delta x\\&+f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$. 又因为 f_x、f_y 在$(x_0,\ y_0)$处连续，故若记

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f_x(x_0,\ y_0)=\alpha,$$
$$f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)-f_y(x_0,\ y_0)=\beta,$$

当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时也必有 $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$. 于是式(2.12) 可改写成

$$\Delta z=f_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y(x_0,\ y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y. \qquad (2.13)$$

又因为 $$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant\left|\frac{\alpha\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|+\left|\frac{\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|,$$

所以式(2.13)又可写成为

$$\Delta z=f_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y(x_0,\ y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

这就是说函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处是可微的. ▌

例 4 试求函数 $z=x^2+4y^3$ 在 $(x,\ y)$ 处的全微分.

解 因为偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=12y^2$$

均为连续函数，所以根据定理 2.3 和定理 2.2, 可知此函数在任一点 $(x,\ y)$ 处都是可微的，且全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2x\,dx+12y^2dy.$$

例 5 试求函数 $u=e^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

解 因为偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+z}(\sin(x+y)+\cos(x+y)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x+z}\cos(x+y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{x+z}\sin(x+y)$$

都是连续函数，因此函数在任一点 $(x,\ y,\ z)$ 处都是可微的，它的全微分 du 应为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$=e^{x+z}(\sin(x+y)+\cos(x+y))dx$$

$$+e^{x+z}\cos(x+y)\,dy+e^{x+z}\sin(x+y)\,dz.$$

在讨论一元函数时，曾利用微分 $dy=f'(x)dx$ 代替函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 作近似计算和误差估计. 对于二元函数，我们同样可以利用全微分 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ 代替全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$ 作近似计算和误差估计. 下面我们用两个例子来说明.

例 6　试求 $\sqrt{(0.98)^2+(2.01)^2+(1.94)^2}$ 的近似值.

解　令函数 $u=f(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=2,$$

$$\Delta x=-0.02,\ \Delta y=0.01,\ \Delta z=-0.06.$$

故
$$f(x_0,\ y_0,\ z_0)=f(1,\ 2,\ 2)=\sqrt{1+4+4}=3,$$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)=\sqrt{(0.98)^2+(2.01)^2+(1.94)^2}.$$

函数　$u=f(x,\ y,\ z)$ 在 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处关于上述 Δx、Δy、Δz 的全微分为

$$du=f_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta x+f_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta y+f_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta z$$

$$=\frac{x_0\Delta x+y_0\Delta y+z_0\Delta z}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=-0.04.$$

所以
$$\sqrt{(0.98)^2+(2.01)^2+(1.94)^2}$$

$$=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)=f(x_0,\ y_0,\ z_0)+\Delta u$$

$$\approx f(x_0,\ y_0,\ z_0)+du=3-0.04=2.96.$$

例 7　设以秒摆测重力加速度 g 时，测得摆长 $l=100\pm0.1$ 厘米，周期 $T=2\pm0.004$ 秒. 试求由于 l 与 T 的误差而引起的 g 的误差.

解　由物理学知道 g、l、T 的关系为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

故
$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

由此可得全微分

$$dg = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\Delta l - \frac{2l}{T^3}\Delta T\right).$$

现 $|\Delta l| \leqslant 0.1$, $|\Delta T| \leqslant 0.004$, $l=100$, $T=2$, 所以

$$|\Delta g| \approx |dg| \leqslant 4\pi^2\left(\left|\frac{\Delta l}{T^2}\right| + \left|\frac{2l\,\Delta T}{T^3}\right|\right)$$

$$\leqslant 4\pi^2\left(\frac{0.1}{4} + \frac{200}{8}\times 0.004\right)$$

$$\leqslant 4.94(\mathrm{cm/s^2}).$$

3. 复合函数的偏导数

1° 链式法则 设 $z=f(u, v)$, 而 u、v 又都是变量 x 和 y 的函数: $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$, 即 z 为通过中间变量 u、v 合成的 x、y 的复合函数. 现在我们希望通过 $\frac{\partial z}{\partial u}$、$\frac{\partial z}{\partial v}$、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ 表示偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

定理 2.4 设函数 $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ 在 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ 均存在, 函数 $z=f(u, v)$ 在点 (x, y) 所对应的 (u, v) 处可微, 那末复合函数 $z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处关于 x 和 y 的偏导数都存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.15}$$

证明 先推导式(2.14), 为此考虑

$$\Delta z = f[\varphi(x+\Delta x, y), \psi(x+\Delta x, y)] - f[\varphi(x, y), \psi(x, y)].$$

若令 $\Delta u = \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)$, $= A\Delta x + o(\Delta x)$

$$\Delta v = \psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y).$$

于是上面的 Δz 可改写成

$$\Delta z = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v).$$

因为 $z=f(u, v)$ 在相应的 (u, v) 处可微, 所以这个 Δz 又进一步可写成下列形式:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right). \quad (2.16)$$

按 $o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)$ 的含义，又可把它写成为

$$o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)=\alpha\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2},$$

其中，α 是满足当 $\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\to 0$ 时 $\alpha\to 0$ 这个条件的. 于是由式(2.16)，有

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}+\alpha\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}. \quad (2.17)$$

因为 $u=\varphi(x,\ y)$，$v=\psi(x,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 处的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$ 都存在，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，应有 $\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$，$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\Delta v}{\Delta x}\to\frac{\partial v}{\partial x}$，从而 $\alpha\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}\to 0$. 因此令 $\Delta x\to 0$，从式(2.17)便可得到式(2.14).

同理，也可推出式(2.15). ▌

例8　设 $z=e^u\sin v$，其中 $u=2xy$，$v=x^2+y$. 试求偏导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=\pi}}$ 和 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=\pi}}$.

解　由定理 2.4 可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot 2y+e^u\cos v\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot 2x+e^u\cos v.$$

又 $u=2xy$，$v=x^2+y$，因此当 $x=0$，$y=\pi$ 时，$u=0$，$v=\pi$. 由此便有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=\pi}}=e^0\sin\pi\cdot 2\pi+e^0\cos\pi\cdot 0=0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=\pi}}=e^0\sin\pi\cdot 0+e^0\cos\pi=-1.$$

如果定理2.4中u、v都仅是变量x的函数：$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，那末复合函数$z=f(u,v)=f[\varphi(x),\psi(x)]$是一个一元函数，这时式(2.14)就成为下列形式：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}, \tag{2.18}$$

并称$\frac{dz}{dx}$为函数z关于变量x的全导数.

特别当$v=\psi(x)=x$时，即$z=f(u,v)=f[\varphi(x),x]$时，式(2.18)就可写成下列形式：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}.$$

请注意上式中$\frac{dz}{dx}$与$\frac{\partial z}{\partial x}$的区别. $\frac{\partial z}{\partial x}$是把$u$暂时看作常数(并不把它看作$x$的函数)，对多元函数$z=f(u,x)$关于$x$求偏导的结果. 如果把$u$作为$x$的函数$u=\varphi(x)$，这时$z$就是$x$的一元函数$z=f[\varphi(x),x]$，求此一元函数的导数，这就是全导数$\frac{dz}{dx}$. 上式说明了两者之间的关系.

例9 设$z=\frac{u}{v}$. 就下列情况，应用复合函数求导法则，求全导数$\frac{dz}{dx}$：

(1) $u=e^x$, $v=1-e^{2x}$;

(2) $u=e^x$, $v=x$.

解 (1) 由式(2.18)，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v}e^x-\frac{u}{v^2}(-2e^{2x})$$

$$=\frac{e^x}{1-e^{2x}}+\frac{2e^{3x}}{(1-e^{2x})^2}=\frac{e^x(1+e^{2x})}{(1-e^{2x})^2}.$$

(2) 因为现$v=x$，故$z=\frac{u}{x}$. 于是

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}e^x+\left(-\frac{u}{x^2}\right)$$

$$=\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

这个结果与从 $z=\frac{e^x}{x}$ 直接求导的结果是一致的.

对一般的多元函数的复合函数求偏导数，也有类似于定理2.4的结果，请看下面的例题.

例 10 设 $u=ze^x\sin y$，其中 $x=2st$，$y=s^2-t$，$z=t-s$. 试求偏导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\substack{s=-1\\t=1}}$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{s=-1\\t=1}}$.

解 类似于定理 2.4 的结果，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\&=ze^x\sin y\cdot 2t+ze^x\cos y\cdot 2s+e^x\sin y\cdot(-1),\\\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\&=ze^x\sin y\cdot 2s+ze^x\cos y\cdot(-1)+e^x\sin y.\end{aligned}$$

因为当 $s=-1$，$t=1$ 时，$x=-2$，$y=0$，$z=2$，于是代入上两式便得：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\substack{s=-1\\t=1}}=2e^{-2}(-2)=-4e^{-2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{s=-1\\t=1}}=-2e^{-2}.$$

例 11 已知 $w=f(x-y,\ y-z,\ t-z)$，试求 $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}$.

解 令 $u=x-y$，$v=y-z$，$s=t-z$，故

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial s},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial s}.$$

四式相加便得：

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}=0.$$

2° 全微分形式的不变性　对于一元函数 $y=f(x)$，不论变量 x 是一个自变量还是一个中间变量，它的微分总可写成 $dy=f'(x)dx$ 的形式。这就称为一元函数的微分形式的不变性。下面我们将说明，对于多元函数也具有类似的性质。当然我们还是以二元函数为代表来说明。

函数 $z=f(x, y)$，当 x、y 为自变量时，它的全微分的形式为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

如果 x、y 为中间变量，它们都是自变量 s、t 的函数，即 z 为 s、t 的复合函数，这时它的全微分形式应为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt.$$

从式(2.14)和(2.15)上式可进一步写成

$$\begin{aligned}dz&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right).\end{aligned}$$

因为 x、y 为 s、t 的函数，即 $x=x(s,t)$，$y=y(s, t)$，故

$$dx=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt.$$

从上面三个式子便得

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

也就是说，对于函数 $z=f(x, y)$，不论 x、y 是自变量还是中间变量，它的全微分都可以写成式(2.11)的形式，这就称为全微分形

式的不变性.

3° 切平面与法线 设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 $z=f(x, y)$ 上的一点(即其中 $z_0=f(x_0, y_0)$), l 为此曲面上过点 M_0 且在 M_0 处有切线的一条曲线. 如果曲面 $z=f(x, y)$ 上过点 M_0 的所有这种曲线 l 的切线都处在同一平面 π 上, 就称曲面 $z=f(x, y)$ 在点 M_0 处是光滑的. 平面 π 称为曲面 $z=f(x, y)$ 在点 M_0 处的**切平面**, π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 称为曲面 $z=f(x, y)$ 在点 M_0 处的**法向量**(见图2.4). 如果曲面 $z=f(x, y)$ 上每一点处都是光滑的, 则称此曲面为一个**光滑的曲面**.

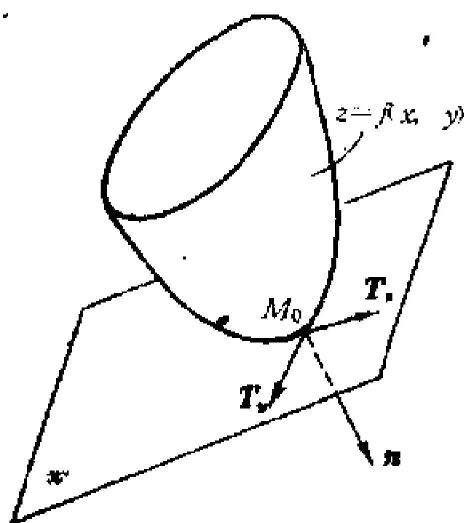


图 2.4

若函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是可微的, 由定理 2.2 可知, 这时偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 都存在. 因此曲面 $z=f(x, y)$ 被平面 $y=y_0$ 所截的截口曲线

$$\begin{cases} z=f(x, y), \\ y=y_0 \end{cases}$$

在 $x=x_0$ 处是有切线存在的, 此切线的一个方向向量 $\boldsymbol{T}_x$ 由式(2.6)给出. 此截口曲线显然是曲面 $z=f(x, y)$ 上过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (其中 $z_0=f(x_0, y_0)$), 且在点 M_0 处有切线的一条曲线. 同样, 曲面 $z=f(x, y)$ 被平面 $x=x_0$ 所截的截口曲线

$$\begin{cases} z=f(x, y), \\ x=x_0 \end{cases}$$

也是曲面 $z=f(x, y)$ 上过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且在点 M_0 处有切线的一条曲线. 此切线的一个方向向量 $\boldsymbol{T}_y$ 由式(2.7)给出.

如果曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处是光滑的, 则向量 $\boldsymbol{T}_x$ 和 $\boldsymbol{T}_y$ 都应在点 M_0 处的切平面 π 上. 于是向量 $\boldsymbol{T}_x\times\boldsymbol{T}_y$ 就是切平面 π 的一个法向量 $\boldsymbol{n}$. 从式(2.6)、(2.7), 并注意到式(1.47), 便得

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{T}_x\times\boldsymbol{T}_y=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & f_x(x_0,\ y_0)\\ 0 & 1 & f_y(x_0,\ y_0)\end{vmatrix}$$

$$=-f_x(x_0,\ y_0)\boldsymbol{i}-f_y(x_0,\ y_0)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}. \tag{2.19}$$

下面我们将说明当函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处可微时，曲面在点 $M_0(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ 处一定是光滑的.

定理2.5 若函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处是可微的，则曲面 $z=f(x,\ y)$ 在点 $M_0(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ 处必是光滑的，它在点 M_0 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 可由式(2.19)确定. 曲面在 M_0 处的切面方程 π 为

$$z-z_0=f_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,\ y_0)(y-y_0), \tag{2.20}$$

其中 $z_0=f(x_0,\ y_0)$. 曲面 $z=f(x,\ y)$ 在 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{1}. \tag{2.21}$$

证明 设 l 为曲面 $z=f(x,\ y)$ 上过点 M_0，且在 M_0 处有切线的任一曲线. 设曲线 l 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

且

$$\boldsymbol{r}(t_0)=\overrightarrow{OM_0}.$$

易知曲线 l 在点 M_0 处的切线上的一个方向向量为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=x'(t_0)\boldsymbol{i}+y'(t_0)\boldsymbol{j}+z'(t_0)\boldsymbol{k}. \tag{2.22}$$

又因为曲线 l 在曲面 $z=f(x,\ y)$ 上，因此

$$z(t)\equiv f(x(t),\ y(t)).$$

对上式两端分别关于 t 求导，并注意到式(2.18)和 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，便可得到下式：

$$z'(t_0)=f_x(x_0,\ y_0)x'(t_0)+f_y(x_0,\ y_0)y'(t_0).$$

把它代入式(2.22)便得

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=x'(t_0)\boldsymbol{i}+y'(t_0)\boldsymbol{j}+(f_x(x_0,\ y_0)x'(t_0)$$
$$+f_y(x_0,\ y_0)y'(t_0))\boldsymbol{k}.$$

对于由式(2.19)确定的 $\boldsymbol{n}$，通过直接验证便知

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

也就是说这种曲线 l 在点 M_0 处的切线的方向向量都与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂

直．所以这种切线都处在同一平面 π 上，即曲面 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 处是光滑的，$\boldsymbol{n}$ 即为曲面的一个法向量．由此进一步可知曲面在点 M_0 处的切平面方程和曲面在点 M_0 处的法线方程分别为(2.20)和(2.21)． ▌

例 12　试求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(0, 0, 0)和点(1, 1, 2)处的切平面方程和法线方程．

解　可以验证点(0, 0, 0)和点(1, 1, 2)确实都在曲面 $z=x^2+y^2$ 上．易知函数 $z=x^2+y^2$ 在整个 xOy 坐标面上都是可微的，因此 $z=x^2+y^2$ 是一个光滑的曲面．因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y,$$

故根据定理 2.5，可知曲面在点 $(x,y,f(x,y))$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=-2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

(1) 先考虑点(0, 0, 0)处的切平面方程和法线方程．易知曲面在该点处的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$．因此该点处的切平面方程为

$$z=0,$$

而该点处的法线方程应写成

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

(2) 现考虑点(1, 1, 2)处的切平面方程和法线方程．易知曲面在该点处的法向量

$$\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

因此该点处的切平面方程为

$$z-2=2(x-1)+2(y-1),$$

该点处的法线方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}.$$

4°　全微分的几何意义　一元函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 处的切线所相应的线性函数 $y=f'(x_0)\cdot x+A$ 在 x_0 处关于 Δx 的增量．

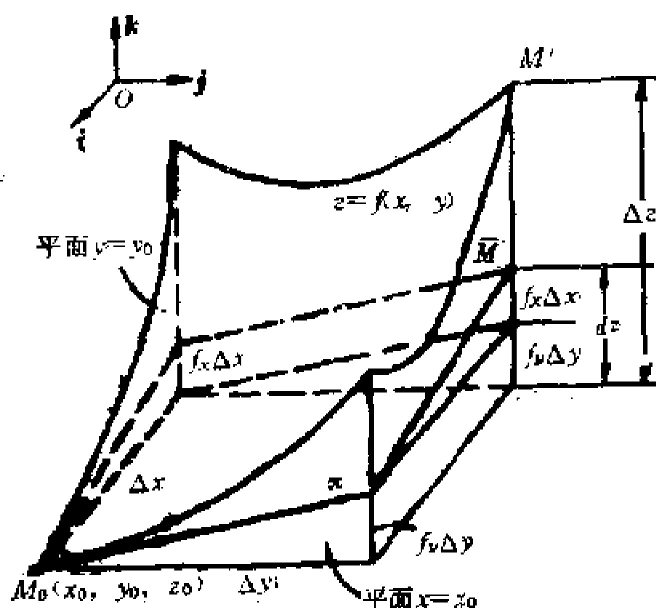


图 2.5

从图2.5，我们可以看出，二元函数$z=f(x, y)$在(x_0, y_0)处的全微分

$$dz=f_x(x_0, y_0)\,\Delta x+f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

是曲面$z=f(x, y)$在点$M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切平面所相应的线性函数$z=f_x'(x_0, y_0)\cdot x+f_y'(x_0, y_0)\cdot y+C$在$(x_0, y_0)$处关于$\Delta x$、$\Delta y$的增量.

§3 高阶偏导数

1. 概念与计算

设函数$z=f(x, y)$在区域D内偏导数$f_x(x, y)$和$f_y(x, y)$都存在. 显然，偏导数$f_x(x, y)$和$f_y(x, y)$在区域D内仍然是变量x、y的函数. 因此也可以再讨论它们关于x或关于y的偏导数，这种偏导数就称为函数$z=f(x, y)$的二阶偏导数. 例如，$f_x(x, y)$关于x的偏导数$\dfrac{\partial(f_x)}{\partial x}$就称为$f(x, y)$关于$x$的二阶偏导数，记为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$或$f_{xx}$. 类似地，可把

$$\frac{\partial(f_x)}{\partial y}\ \text{记为}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}，\text{或}\ f_{xy},$$

$$\frac{\partial(f_y)}{\partial x} \text{ 记为 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \text{ 或 } f_{yx},$$

$$\frac{\partial(f_y)}{\partial y} \text{ 记为 } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ 或 } f_{yy}.$$

例 1 试求函数 $f(x, y)=x\cos y+ye^x$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解 先求 $f(x, y)$ 的一阶偏导数，得

$$f_x(x, y)=\cos y+ye^x,$$

$$f_y(x, y)=-x\sin y+e^x.$$

对它们再求偏导数，就得到二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=-\sin y+e^x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-\sin y+e^x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\cos y.$$

f_{xy} 和 f_{yx} 都称为 $f(x, y)$ 关于 x 和 y 的二阶混合偏导数. 在上例中这两个混合偏导数是相等的. 那末，对于一般函数 $f(x, y)$ 而言，这个结论是否也成立呢？下述定理将回答这个问题.

定理 2.6 若函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的二阶混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 都存在且连续，则

$$f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y). \tag{2.23}$$

证明 对于 $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, 我们令

$$\varphi(x, y)=f(x+\Delta x, y)-f(x, y),$$

$$\psi(x, y)=f(x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

$$w=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)$$
$$-f(x+\Delta x, y)+f(x, y).$$

利用 $\varphi(x, y)$ 可以把 w 改写成下列形式：

$$w=\varphi(x, y+\Delta y)-\varphi(x, y).$$

$=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y)$

应用中值定理，可进一步得到

$$\begin{aligned} w &= \varphi_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y \\ &= (f_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y) \\ &\quad - f_y(x, y+\theta_1\Delta y))\Delta y \\ &= f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y)\Delta x\Delta y, \end{aligned} \tag{2.24}$$

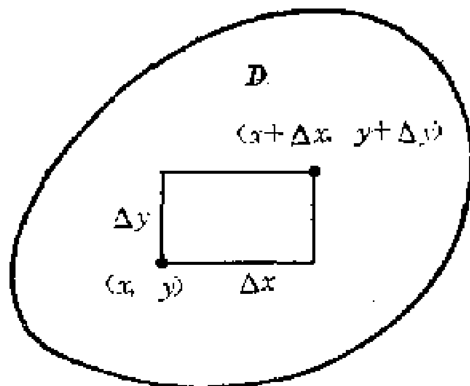


图 2.6

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$. 利用 $\psi(x,y)$ 还可以把 w 写成

$$w=\psi(x+\Delta x, y)-\psi(x, y).$$

应用中值定理，可进一步得到

$$w=f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y)\Delta y\Delta x, \tag{2.25}$$

其中 $0<\theta_3<1$，$0<\theta_4<1$. 比较式(2.24)和(2.25)，便得

$$f_{yx}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f_{xy}(x+\theta_3\Delta x, y+\theta_4\Delta y).$$

由于 f_{yx} 和 f_{xy} 在 (x, y) 处都是连续的，因而令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，由上式便得式(2.23). ∎

对于多元函数 $u=f(x, y, z)$，同样可以考虑它的二阶偏导数，而且在二阶混合偏导数存在且连续的条件下，也有相应结果：

$$u_{xy}=u_{yx},\ u_{yz}=u_{zy},\ u_{xz}=u_{zx}. \tag{2.26}$$

当然还可以考虑 $u=f(x, y, z)$ 的更高阶的偏导数，在相应混合偏导数存在且连续的条件下，同样可有类似结论，例如

$$u_{xyz}=u_{zxy}=u_{yzx}. \tag{2.27}$$

例 2 设 $u=f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$，$f$ 的各种二阶偏导数都存在且连续，试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 令 $\xi=xy$，$\eta=\dfrac{x}{y}$，则 $u=f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$ 就是由函数 $u=f(\xi,\eta)$，$\xi=xy$，$\eta=\dfrac{x}{y}$ 组成的复合函数. 按复合函数求导法则可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$、$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ 也都是以 ξ, η 为中间变量的关于 x、y 的复合函数. 因

而求 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$、$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$、$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$、$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$时也都应根据复合函数的求导法则进行．于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \\
&= y\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \\
&\quad +\frac{1}{y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \\
&= y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

根据假设，混合偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ 都是连续的，因而按定理 2.6 它们应相等．于是最后可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

例 3　设 $z=f(x+ct)+g(x-ct)$，其中 f 和 g 都是具有二阶连续导数的一元函数，x 和 t 是变量，c 是一个常量．试证明下列关系式成立：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

解　令 $u=x+ct$，$v=x-ct$，则 z 就是由函数 $z=f(u)+g(v)$，$u=x+ct$，$v=x-ct$ 组成的关于 x、t 的复合函数．根据复合函数求导法则，便有

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{df}{du}-c\frac{dg}{dv},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{df}{du}+\frac{dg}{dv}.$$

f 和 g 的导数 $\frac{df}{du}$ 和 $\frac{dg}{dv}$ 也分别是以 u 和 v 为中间变量的关于 x、t 的复合函数．再应用复合函数求导法则，可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{df}{du}\right)-c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dg}{dv}\right)=c\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{d^2g}{dv^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$=c^2\left(\frac{d^2f}{du^2}+\frac{d^2g}{dv^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{dv}\right)=\frac{d^2f}{du^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{d^2g}{dv^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{d^2f}{du^2}+\frac{d^2g}{dv^2}.$$

因此
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

2. 泰勒公式

一元函数的泰勒(Taylor)公式也可以推广到多元函数情况．为了简单起见，我们只讨论二元函数的情况，但其结果容易平行地推广到 n 元函数的情况．

定理 2.7 若函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某 δ 邻域内具有 $n+1$ 阶连续偏导数，且点 (x_0+h, y_0+k) 也在此 δ 邻域内，则

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0)+R_n, \tag{2.28}$$

其中

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$$
$$=h\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0)+k\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0),$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$
$$=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0, y_0)+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0, y_0)$$
$$+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0, y_0),$$

其余以此类推；

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$

$$(0<\theta<1)\qquad(2.29)$$

称此 R_n 为拉格朗日(Lagrange)余项.

证明　先引进一个参变量 t, 令 $x=x_0+th,\ y=y_0+tk$. 设一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk)\qquad(-1\leqslant t\leqslant 1).$$

显然, $\varphi(0)=f(x_0,\ y_0)$, $\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$. 应用一元函数的泰勒公式可以把 $\varphi(1)$ 写成下列形式:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),$$

其中 $0<\theta<1$. 根据 $\varphi(t)$ 的定义,便知

$$\varphi'(0)=hf_x(x_0,\ y_0)+kf_y(x_0,\ y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0),$$

$$\varphi''(0)=h^2f_{xx}(x_0,\ y_0)+2hkf_{xy}(x_0,\ y_0)+k^2f_{yy}(x_0,\ y_0)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,\ y_0),$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,\ y_0),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k).$$

把这些结果代入上面 $\varphi(1)$ 的展开式,并注意到 $\varphi(0)=f(x_0,\ y_0)$, $\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k)$,便可得到式(2.28). ∎

在定理 2.7 中,我们假定函数在点 (x,y) 的 δ 邻域内 $n+1$ 阶偏导数都存在且连续. 因而在这个条件下,必存在一个正数 K,使得 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$ 处的各个 $n+1$ 阶偏导数的绝对值都不超过 K,于是可知余项(2.29)的绝对值

$$|R_n|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}(|h|+|k|)^{n+1}K$$

$$= \frac{K}{(n+1)!}\left(\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)^{n+1}(\sqrt{h^2+k^2})^{n+1}$$

$$\leqslant \frac{2^{n+1}K}{(n+1)!}(\sqrt{h^2+k^2})^{n+1},$$

因为 $|h| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$，$|k| \leqslant \sqrt{h^2+k^2}$. 于是有

$$\frac{|R_n|}{(\sqrt{h^2+k^2})^n} \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} K \sqrt{h^2+k^2}.$$

因此当 $h \to 0, k \to 0$ 时，$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} K \sqrt{h^2+k^2} \to 0$，故

$$R_n = o((\sqrt{h^2+k^2})^n). \tag{2.30}$$

例 4 试写出函数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ 的泰勒展开式.

解 因为

$$f_x(x, y) = 2x + 2y,\ f_y(x, y) = 2x + 4y,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2,\ f_{xy}(x, y) = 2,\ f_{yy}(x, y) = 4,$$

$f(x, y)$ 三阶以上的偏导数均恒等于零. 于是按式(2.28)可得到它的泰勒展开式如下:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + R_3 \\ &= x^2 + 2xy + 2y^2 + h(2x+2y) + k(2x+4y) \\ &\quad + \frac{1}{2}(2h^2 + 4hk + 4k^2) \\ &= x^2 + 2xy + 2y^2 + 2(h+k)x + 2(h+2k)y \\ &\quad + h^2 + 2hk + 2k^2. \end{aligned}$$

§4 隐 函 数

1. 隐函数存在定理

设方程 $F(x, y) = 0$ 在某一范围内，对每个 x 值都有唯一确定的 y 值满足这个方程. 那末，在此范围内，方程 $F(x, y) = 0$ 就确定了变量 x 与 y 的一种函数关系 $y = f(x)$ (即 $F(x, f(x)) \equiv 0$). 用这种方式确定的函数称为**隐函数**. 那末，在什么条件下方程

$F(x, y)=0$ 确定了一个隐函数？这种隐函数的导数又如何确定呢？为此，我们先考察方程 $x^2+y^2-1=0$，它的图形是一个单位圆．由图 2.7 容易得出下列结论：

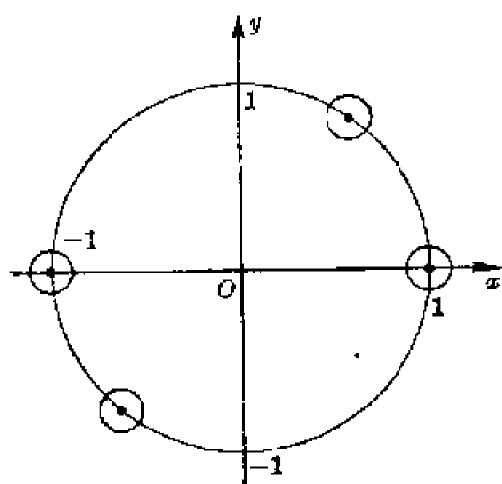


图　2.7

(1) 上半圆周上，除(1，0)和(-1，0)这两点外，任一点处都存在一个 δ 邻域，在此 δ 邻域内方程 $x^2+y^2-1=0$ 唯一确定了函数关系 $y=\sqrt{1-x^2}$，而且曲线在这种点处的切线斜率都是有限值．

(2) 下半圆周上，除(1，0)和(-1，0)这两点外，任一点处也都存在一个 δ 邻域，在此 δ 邻域内方程 $x^2+y^2-1=0$ 唯一确定了函数关系 $y=-\sqrt{1-x^2}$，而且曲线在这种点处的切线斜率也都是有限值．

(3) 点(1，0)和(-1，0)的任一 δ 邻域内，一个 x 值可能有两个满足方程 $x^2+y^2-1=0$ 的 y 值与它对应．因而这时 x 与 y 之间的关系不是函数关系．而且曲线在这两点处的切线斜率均为 ∞．

本节将给出有关隐函数存在性、连续性、可导性的定理．它们在理论上和计算上都很重要．但是对于这些定理我们将都不予以证明．

定理 2.8　设函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ 的一个 δ 邻域内连续，并具有一阶连续偏导数 F_{x_1}、F_{x_2}、…、F_{x_n}、F_y，又 $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)=0$，$F_y(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)\neq 0$，则在此 δ 邻域内，方程 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)=0$ 唯一确定了一个连续函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$（即满足

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))\equiv 0),$$

且 $y^0=f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有连续一阶偏导数

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\ f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\ \cdots,\ f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}. \tag{2.31}$$

定理 2.8 中给出的计算偏导数的公式 (2.31) 不必硬记，事

实上，当定理的假设条件满足时，在所述的 δ 邻域内，$F=0$ 确定了一个函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，于是在此 δ 邻域内恒成立

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))=0.$$

对上面等式的两端都关于 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 求偏导数，运用复合函数求导法则便得

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot f_{x_i}=0,$$

从而式(2.31)成立.

例 1 试求隐函数 $1+yz+x^2z^2+z^3=0$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，以及它们在点(1, 1, −1)处的值.

解 设 $F(x, y, z)=1+yz+x^2z^2+z^3$，故可得

$$F_x=2xz^2,$$

$$F_y=z,$$

$$F_z=y+2x^2z+3z^2.$$

由式(2.31)，便得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-2xz^2}{y+2x^2z+3z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-z}{y+2x^2z+3z^2}.$$

它们在点(1, 1, −1)处的值便为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,-1)}=-1,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,-1)}=\frac{1}{2}.$$

例 2 设函数 $z=z(x, y)$ 是由方程 $F(x-z, y+z)=0$ 所确定的隐函数，F 的一阶偏导数都存在且连续，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $u=x-z$，$v=y+z$，则方程 $F(x-z, y+z)=0$ 可写成 $F(u, v)=0$. 对此方程的两端关于 x 求偏导数，得

$$F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

u 实际上可看作是通过中间变量 x、z 组成的变量 x、y 的复合函数，

而 v 实际上可看作是通过中间变量 y、z 组成的变量 x、y 的复合函数. 运用复合函数求导法则,便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x}.$$

将所得 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入前面的方程,可解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u}{F_u+F_v}.$$

同样,如果对方程 $F(u,\ v)=0$ 的两端关于 y 求偏导数,便可得到

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_v}{F_u+F_v}.$$

下面我们将给出关于方程组的隐函数存在定理. 我们先从形式上对方程组的隐函数求导法作探讨,从而导出函数行列式的概念.

2. 函数行列式

先考察方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=0,\\ F_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=0.\end{cases}\tag{2.32}$$

假设这个方程组在一定条件下能确定可微函数

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,\ x_2),\\ y_2=f_2(x_1,\ x_2).\end{cases}\tag{2.33}$$

为了确定 f_1, f_2 关于 x_1、x_2 的偏导数,将式(2.33)代入(2.32),得恒等式

$$\begin{cases}F_1(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))\equiv 0,\\ F_2(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))\equiv 0.\end{cases}$$

对恒等式的两端都关于 x_1 求偏导数,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}=0,\end{cases}\tag{2.34}$$

其中 F_1、F_2 的偏导数都可以直接通过对 F_1、F_2 求偏导数得到。若记

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{vmatrix},$$

那末，当

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}\neq 0 \tag{2.35}$$

时，可以从式(2.34)中解出 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$、$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ 如下：

$$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_1, y_2)}\Big/\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)},\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, x_1)}\Big/\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)},\end{cases}$$

其中，

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_1, y_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{vmatrix},$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, x_1)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\end{vmatrix}.$$

应用同样的方法可以求得 $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$、$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$.

对于方程组(2.32)，条件(2.35)显然应取作求隐函数偏导数的假设条件，必须引起特别注意.

一般地，考察方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0,\\ F_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ F_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0,\end{cases} \tag{2.36}$$

我们可以定义一个 m 阶行列式如下：

$$\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \quad (2.37)$$

称它为函数 $F_1, F_2, \cdots, F_m$关于变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的函数行列式或雅可比(Jacobi)行列式．其中m阶行列式可按下面的递推公式进行计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{m+1}a_{1m}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,m-1} \end{vmatrix}.$$

下面我们介绍关于函数行列式的两条性质，但都不给予证明．

性质 1　设下列函数都在区域 D 中具有关于一切变元的连续偏导数：

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases}$$

并且通过下列函数组定义了区域$\bar{D}$到区域D的映射：

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_n), \\ x_2=\varphi_2(t_1, t_2, \cdots, t_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \cdots, t_n), \end{cases}$$

而且函数 φ_1、φ_2、…、φ_n 在 $\tilde{D}$ 内关于一切变元的偏导数也都存在且连续，则

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)}=\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(t_1, t_2, \cdots, t_n)}. \qquad (2.38)$$

这个性质可以看成是复合函数 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$ 的求导公式 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ 的拓广.

性质 2 设下列函数都在区域 D 中具有关于一切变元的连续偏导数：

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases}$$

而且它的反函数

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ x_2=\varphi_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\varphi_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

也存在，它们对各个变元的偏导数也存在且连续，则

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\cdot\frac{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}=1. \qquad (2.39)$$

这个性质可以看成是反函数求导公式 $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$ 的拓广.

3. 方程组的隐函数存在定理

下面叙述方程组(2.36)的隐函数存在定理. 方程组(2.32)的偏导数的导出将有助于读者理解下述定理.

定理 2.9 设函数 $F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$在$(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)$的某$\delta$邻域内都是连续的，且它们的一切偏导数也都存在且连续，又 $F_i(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)=0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，且函数行列式 $\dfrac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)$处的值不等于零，则方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)=0 \end{cases}$$

在此$(x_1^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, \cdots, y_m^0)$ 的δ邻域内唯一确定了一组函数关系式

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

(即满足 $F_i(x_1, \cdots, x_n, f_1, \cdots, f_m)\equiv 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，其中 f_k 即为 $f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$)，$y_i^0=f_i(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，且 f_k 具有一阶连续偏导数

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{D(F_1, \cdots, F_k, \cdots, F_m)}{D(y_1, \cdots, x_j, \cdots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, \cdots, F_k, \cdots, F_m)}{D(y_1, \cdots, y_k, \cdots, y_m)}}$$

$$(k=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n). \tag{2.40}$$

例 3 给定函数方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0, \\ xy-u^2+v^2=0. \end{cases}$$

试求由它所确定的函数 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 设函数

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - uv, \\ F_2(x, y, u, v) = xy - u^2 + v^2. \end{cases}$$

于是可得

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u} = -v, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = -u,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u} = -2u, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} = 2v.$$

由此可算得函数行列式

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v & -u \\ -2u & 2v \end{vmatrix} = -2(u^2 + v^2),$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -u \\ y & 2v \end{vmatrix} = 4xv + uy,$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v & 2x \\ -2u & y \end{vmatrix} = 4xu - vy.$$

根据式(2.40)，便得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)} \bigg/ \frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \frac{4xv + uy}{2(u^2 + v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)} \bigg/ \frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \frac{4xu - vy}{2(u^2 + v^2)}.$$

应用同样方法可得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4yv + xu}{2(u^2 + v^2)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4yu - xv}{2(u^2 + v^2)}.$$

作为这种微分法的应用，我们下面讨论由方程 $F(x, y, z) = 0$ 形式给出的曲面的法向. 若曲面由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出，(x_0, y_0, z_0) 为曲面上的一点（即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$），如果 $F(x, y, z)$ 的一阶偏导数 F_x、F_y、F_z 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一 δ 邻域内都存

在且连续，而且 $F_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$，那末，根据定理 2.8，可知在此 δ 邻域内方程 $F(x, y, z)=0$ 确定了一个函数 $z=f(x, y)$，且 $f_x=-\dfrac{F_x}{F_z}$，$f_y=-\dfrac{F_y}{F_z}$．于是由式(2.19)给出曲面 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量可以改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=-f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i}-f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\\&=\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\boldsymbol{i}+\frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

显然，在 (x_0, y_0, z_0) 的该 δ 邻域内方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的曲面也就是函数 $z=f(x, y)$ 所表示的曲面．故上述向量 $\boldsymbol{n}$ 也就是曲面 $F(x, y, z)=0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量．当然向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}=F_x(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{i}+F_y(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{j}\\+F_z(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{2.41}$$

也应是曲面 $F(x, y, z)=0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量．实际上，对于曲面 $F(x, y, z)=0$ 而言，变量 x、y、z 的地位是相同的．不一定要把 x、y 作为自变量，把 z 作为它们的函数．因而只要偏导数 F_x、F_y、F_z 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内存在且连续，$F_x(x_0, y_0, z_0)$、$F_y(x_0, y_0, z_0)$、$F_z(x_0, y_0, z_0)$ 三者不全为零，就可得知式(2.41)中的 $\boldsymbol{N}$ 即为曲面 $F(x, y, z)=0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的一个法向量．

例4　试求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处的切平面方程．

解　令 $F(x, y, z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，椭球面方程就成为 $F(x, y, z)=0$ 的形式．易知

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\ F_y=\frac{2y}{b^2},\ F_z=\frac{2z}{c^2}.$$

由式(2.41)可知椭球面在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\frac{2}{\sqrt{3}a}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{3}b}\boldsymbol{j}+\frac{2}{\sqrt{3}c}\boldsymbol{k}.$$

于是椭球面在该点处的切平面方程为

$$\frac{2}{\sqrt{3}a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}b}\left(y-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}c}\left(z-\frac{c}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

化简后可得$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

例 5* 试求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的一个切平面 π，它通过一条给定直线 L:
$$\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0.\end{cases}$$

解 设函数 $F(x, y, z)=3x^2+y^2-z^2-27$. 于是有

$$F_x=6x,\ F_y=2y,\ F_z=-2z.$$

如果 π 为曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面，则向量

$$\boldsymbol{N}=6x_0\boldsymbol{i}+2y_0\boldsymbol{j}-2z_0\boldsymbol{k}$$

是 π 的一个法向量.

由式(1.66)可知过直线 L 的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0.$$

故 π 的方程也将具有上述形式. 由此可知 π 的法向量又可写成下列形式

$$\boldsymbol{n}=(10+\lambda)\boldsymbol{i}+(2+\lambda)\boldsymbol{j}-(2+\lambda)\boldsymbol{k}.$$

因 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{N}$，点 (x_0, y_0, z_0) 既在曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 上，又在平面 π 上，故平面 π 所对应的实数 λ 和 x_0、y_0、z_0 必须满足下述方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{6x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{-(2+\lambda)}{-2z_0},\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2-27=0,\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0.\end{cases}$$

求解此方程组可得两组解:

$$x_0=3,\ y_0=1,\ z_0=1,\ \lambda=-1;$$

或 $$x_0=-3,\ y_0=-17,\ z_0=-17,\ \lambda=-19.$$

故所求的切平面共有两个，其方程分别为

$$9x+y-z-27=0,$$

和
$$9x+17y-17z+27=0.$$

最后讨论由参数形式给出的曲面的切平面方程. 设曲面由下列参数形式给出:

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,v). \end{cases} \tag{2.42}$$

设 $x_0=x(u_0,\ v_0)$, $y_0=y(u_0,\ v_0)$, $z_0=z(u_0,\ v_0)$, 即点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上的一点. 我们现要求曲面这一点处的切平面方程. 当然关键就是要确定曲面在这一点处的一个法向量 $\boldsymbol{n}$. 如果函数 $x(u,v)$、$y(u,\ v)$、$z(u,\ v)$ 的各种一阶偏导数都存在、连续, 且在 (u_0,v_0) 处, 函数行列式 $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$、$\dfrac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}$、$\dfrac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}$ 不全为零, 不妨设 $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\neq 0$, 由定理 2.9 可知, 方程组

$$\begin{cases} F_1(x,\ y,\ u,\ v)=x(u,\ v)-x=0, \\ F_2(x,\ y,\ u,\ v)=y(u,\ v)-y=0 \end{cases}$$

确定了一组函数

$$\begin{cases} u=u(x,\ y), \\ v=v(x,\ y). \end{cases}$$

这样, 曲面方程就可化为

$$z=z(u(x,\ y),\ v(x,\ y)).$$

根据复合函数的求导法则和定理 2.9 易知, 它的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 的某一 δ 邻域内存在、连续, 于是此函数在 $(x_0,\ y_0)$ 处可微, 因此相应的曲面在 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处是光滑的.

现在考察由参数方程 (2.42) 给出的曲面上过点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的 u 曲线和 v 曲线. 显然此 u 曲线可写成下列参数方程形式:

$$\begin{cases} x=x(u,\ v_0), \\ y=y(u,\ v_0), \\ z=z(u,\ v_0), \end{cases}$$

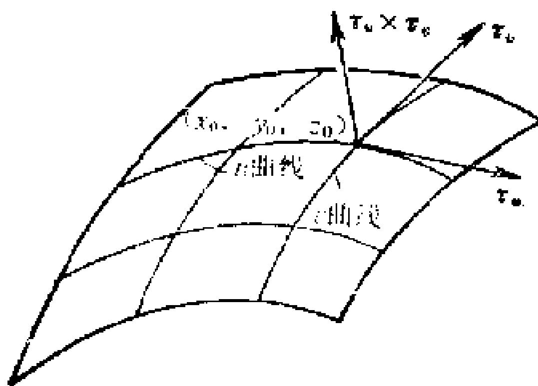


图 2.8

因而向量

$$\tau_u=\frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u}\boldsymbol{k}$$

为此 u 曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量. 同样, 向量

$$\boldsymbol{\tau}_v=\frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

为 v 曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切向量. 于是

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\tau}_u\times\boldsymbol{\tau}_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{i}+\left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{j}+\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{k} \tag{2.43}$$

便是曲面在 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量(见图 2.8).

例 6 试求曲面

$$\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\\ y=b\,\mathrm{ch}\,u\sin v,\\ z=\mathrm{sh}\,u\end{cases}$$

在 $(u, v)=\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 相应的点处的切平面方程.

解 x、y、z 关于参数 u、v 的偏导数分别为:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ \frac{\partial x}{\partial v}=-a\,\mathrm{ch}\,u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=b\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ \frac{\partial y}{\partial v}=b\,\mathrm{ch}\,u\cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\operatorname{ch}u,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

当 $(u,v)=\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$时，可算得

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}},\ y=\frac{b}{\sqrt{2}},\ z=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=0,\ \frac{\partial y}{\partial u}=0,\ \frac{\partial z}{\partial u}=1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{b}{\sqrt{2}},\ \frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=-\frac{b}{\sqrt{2}},\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)}=-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=0.$$

于是所求的切平面方程为

$$-\frac{b}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

化简得
$$bx+ay=\sqrt{2}ab.$$

§5 极值与条件极值

1. 极值

如果函数 $z=f(x,y)$在点 $M_0(x_0,\ y_0)$的某个 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$ 内恒成立

$$f(x_0,y_0)\leqslant f(x,y),\tag{2.44}$$

则称函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处取到极小值 $f(x_0,y_0)$，并称(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极小值点. 如果在 $N_\delta(M_0)$内当$(x,y)\neq(x_0,y_0)$时恒成立

$$f(x_0,y_0)<f(x,y),\tag{2.45}$$

则称 (x_0,y_0) 为$f(x,y)$ 的严格极小值点. 类似地，可定义函数$f(x,y)$的极大值、极大值点和严格极大值点的概念. 函数$f(x,y)$的极小值与极大值统称$f(x,y)$的极值； 函数$f(x,y)$的极小值点与极大值点统称$f(x,y)$的极值点.

设点 $M_0(x_0,y_0)$为函数 $z=f(x,y)$的极值点，例如为极小值点. 那末，在 M_0 的某一 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$内当然应成立

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y_0), \qquad (x, y_0) \in N_\delta(M_0).$$

也就是说，$x=x_0$ 应为一元函数 $f(x, y_0)$ 的极值点. 因此，若 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 存在，则应有

$$f_x(x_0, y_0)=0.$$

同样，若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 存在，则应有

$$f_y(x_0, y_0)=0.$$

于是可有下列定理：

定理 2.10 （**极值点的必要条件**） 设点 $M_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微，则 $f(x, y)$ 在该点处的偏导数必全为零，即

$$f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0. \tag{2.46}$$

我们称函数 $f(x, y)$ 的一阶偏导数全为零的点 (x, y)（即满足

$$f_x(x, y)=f_y(x, y)=0$$

的点）称为 $f(x, y)$ 的逗留点. 定理 2.10 说明，如果函数 $f(x, y)$ 在它的极值点处可微，那末极值点一定是一个逗留点. 但反之不成立. 例如，点 $(0, 0)$ 显然是函数 $z=x^2-y^2$ 的逗留点. 但由式 (1.110) 知 $z=x^2-y^2$ 所表示的曲面是一个马鞍面. 从图 1.48 易知 $(0, 0)$ 点并不是函数 $z=x^2-y^2$ 的一个极值点.

为了给出关于函数 $f(x,y)$ 极值点的充分条件，考察 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的泰勒展开式的二阶项 $\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$. 如果对于任意不全为零的 h 和 k，此二阶项恒为正，即

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)>0, \tag{2.47}$$

则称关于 h, k 的二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$ 是正定的. 如果对于任意不全为零的 h 和 k，此二阶项恒为负，即

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)<0, \tag{2.48}$$

则称关于 h, k 的二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$ 是负定的.

定理 2.11(极值点的充分条件)　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某一 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$ 内具有二阶连续偏导数，$M_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的一个逗留点，且关于 h、k 的二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$ 是正定(或负定)的，则点 $M_0(x_0, y_0)$ 必为函数 $z=f(x, y)$ 的严格极小值点(或严格极大值点)。

证明　按泰勒展开式，有

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\
&=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k),
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

其中 $0<\theta<1$. 因为 $M_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的逗留点，即

$$f_x(x_0, y_0)=0,\ f_y(x_0, y_0)=0$$

故一阶项

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)=0.$$

把二阶项展开，式(2.49)可写成

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\
&=\frac{1}{2}(h^2f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+2hkf_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\\
&\quad+k^2f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

因为我们假设 $f(x, y)$ 的二阶偏导数 f_{xx}、f_{xy}、f_{yy} 在 (x_0, y_0) 处都是连续的．所以可写成

$$
\begin{gathered}
f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{xx}(x_0, y_0)+\alpha\\
(\text{当 } h\to 0,\ k\to 0 \text{ 时},\ \alpha\to 0),\\
f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{xy}(x_0, y_0)+\beta\\
(\text{当 } h\to 0,\ k\to 0 \text{ 时},\ \beta\to 0),\\
f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)=f_{yy}(x_0, y_0)+\gamma\\
(\text{当 } h\to 0,\ k\to 0 \text{ 时},\ \gamma\to 0).
\end{gathered}
$$

于是式(2.50)可以进一步写成

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2). \tag{2.51}$$

显然，当 $h\to 0$，$k\to 0$ 时，$\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2)$ 是比 $\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ 更高阶的无穷小量．又因二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ 是正定的，所以存在 $M_0(x_0,\ y_0)$ 的一个 δ 邻域 $N_\delta(M_0)$，使得只要当 h，k 不全为零且 $(x_0+h,\ y_0+k)\in N_\delta(M_0)$ 时，式(2.51)的右边为正，它说明 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的严格极小值点．

同样，当 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$ 是负定的时，可证得 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的严格极大值点． ▌

下面进一步考察二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ 在什么条件下是正定(或负定)的．为了书写方便，我们令

$$f_{xx}(x_0,\ y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,\ y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,\ y_0)=C.$$

于是有 $$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)=Ah^2+2Bhk+Ck^2.$$

因为

$$A(Ah^2+2Bhk+Ck^2)=(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2. \tag{2.52}$$

所以当 $A>0$，$B^2-AC<0$ 时，对于任意不全为零的 h、k，都有

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2>0,$$

即二次型 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ 是正定的．而当 $A<0$，$B^2-AC<0$ 时，对于任意不全为零的 h、k，都有

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2<0,$$

即 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$ 是负定的．从而有下面的定理：

定理 2.12 设函数 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 处的二阶偏导数存在，且 $f_{xx}(x_0,\ y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,\ y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,\ y_0)=C$，且 B^2-AC

<0，则二次型$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$在 $A>0$ 时是正定的，在 $A<0$ 时是负定的.

那末，在 $B^2-AC\geqslant 0$ 时，点(x_0, y_0)是否可能成为函数 $f(x, y)$的极值点呢？实际上，当 $B^2-AC>0$ 时，在点 $M_0(x_0, y_0)$的任一 δ 邻域内，总存在点(x_0+h_1, y_0+k_1)和点(x_0+h_2, y_0+k_2)，使得

$$Ah_1^2+2Bh_1k_1+Ck_1^2<0, \tag{2.53}$$

而

$$Ah_2^2+2Bh_2k_2+Ck_2^2>0. \tag{2.54}$$

因为 h、k 不全为零，不妨设 $k\neq 0$，于是

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\left[A\left(\frac{h}{k}\right)^2+2B\left(\frac{h}{k}\right)+C\right]k^2.$$

而二次三项式

$$w=A\left(\frac{h}{k}\right)^2+2B\left(\frac{h}{k}\right)+C$$

中 $B^2-AC>0$，故必存在 $\frac{h_1}{k_1}$ 和 $\frac{h_2}{k_2}$，使得

$$A\left(\frac{h_1}{k_1}\right)^2+2B\left(\frac{h_1}{k_1}\right)+C<0$$

和

$$A\left(\frac{h_2}{k_2}\right)^2+2B\left(\frac{h_2}{k_2}\right)+C>0,$$

而且不妨要求这种 h_1, k_1, h_2, k_2 都充分小，使得点(x_0+h_1, y_0+k_1)和点(x_0+h_2, y_0+k_2)都在 δ 邻域内．于是式(2.53)和(2.54)一定成立．从式(2.51)、(2.53)和(2.54)就不难知道，此时点(x_0, y_0)必不是函数$f(x, y)$的极值点．但当 $B^2-AC=0$ 时，则尚不能断定(x_0, y_0)是否为$f(x, y)$的一个极值点.

例 1　在 xOy 坐标平面上，M_1、M_2、M_3 三点的坐标分别为(a_1, b_1)、(a_2, b_2)、(a_3, b_3)．试在三角形 $M_1M_2M_3$ 内求一点 $M(x, y)$，使得 M 到 M_1、M_2、M_3 的距离的平方之和为最小.

解　令函数$f(x, y)$为点(x, y)到 M_1、M_2、M_3 三点距离平方之和，即

$$f(x,\ y)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+(y-b_1)^2$$
$$+(y-b_2)^2+(y-b_3)^2.$$

本题就是求$f(x,\ y)$的极小值点. $f(x,\ y)$的一阶偏导数分别为

$$f_x(x,\ y)=6x-2a_1-2a_2-2a_3,$$
$$f_y(x,\ y)=6y-2b_1-2b_2-2b_3.$$

由$f_x(x,\ y)=0$和$f_y(x,\ y)=0$可解得$f(x,\ y)$唯一的逗留点，它的坐标是:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(a_1+a_2+a_3), \\ y=\dfrac{1}{3}(b_1+b_2+b_3). \end{cases}$$

$f(x,\ y)$在此逗留点处的二阶偏导数为

$$f_{xx}=6,\quad f_{xy}=0,\ f_{yy}=6.$$

于是$B^2-AC=-36<0$, $A=6>0$. 因此这个逗留点就是$f(x,\ y)$的唯一极小值点. 再注意到第一章§1中的例5，就知此逗留点即为三角形$M_1M_2M_3$之重心(三条中线的交点). 因此三角形$M_1M_2M_3$的重心就是所求之点M.

例2 求函数$f(x,\ y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x-4$的极值点.

解 函数$f(x,\ y)$的一阶偏导数为

$$f_x(x,\ y)=3x^2+6x-9,$$
$$f_y(x,\ y)=-3y^2+6y.$$

求解方程组:
$$\begin{cases} 3x^2+6x-9=0, \\ -3y^2+6y=0, \end{cases}$$

可得到$f(x,\ y)$的四个逗留点$(1,\ 0)$、$(1,\ 2)$、$(-3,\ 0)$、$(-3,\ 2)$. 再求$f(x,\ y)$的二阶偏导数，得

$$f_{xx}=6x+6,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=-6y+6.$$

在$(1,\ 0)$处，$B^2-AC<0$, $A>0$，所以$(1,\ 0)$是$f(x,\ y)$的一个极小值点.

在$(1,\ 2)$处，$B^2-AC>0$，所以$(1,\ 2)$不是$f(x,\ y)$的极值点.

在$(-3,\ 0)$处，$B^2-AC>0$. 所以$(-3,\ 0)$不是$f(x,\ y)$的极

值点.

在$(-3, 2)$处, $B^2-AC<0$, $A<0$, 所以$(-3, 2)$是$f(x, y)$的一个极大值点.

例 3 试证明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值点,但无极小值点.

解 易求得一阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(1+e^y)(-\sin x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\cos x-1-y)e^y.$$

求解方程组:
$$\begin{cases}(1+e^y)(-\sin x)=0,\\(\cos x-1-y)e^y=0,\end{cases}$$

得到无穷多个逗留点:

$$\begin{cases}x=k\pi,\\y=\cos k\pi-1\end{cases}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

函数的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(1+e^y)(-\cos x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-\sin x)e^y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\cos x-2-y)e^y.$$

当 $k=0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots$ 时, $x=k\pi$, $y=0$, 在这种逗留点处, $A=-2$, $B=0$, $C=-1$. 故

$$B^2-AC=-2<0,\ A=-2<0.$$

所以这种逗留点都是函数的极大值点,共有无穷多个.

当 $k=\pm1,\ \pm3,\ \cdots$ 时, $x=k\pi$, $y=-2$, 在这种逗留点处, $A=1+e^{-2}$, $B=0$, $C=-e^{-2}$. 故

$$B^2-AC=(1+e^{-2})e^{-2}>0.$$

所以这种逗留点都不是函数的极值点. 根据定理 2.10, 可知这个函数再无其它极值点. 所以这个函数没有极小值点.

2.* 最小二乘法

设有一组数据(x_1, y_1)、…、(x_n, y_n)．在xOy坐标面上这些点大体在一条直线上，因而可用一个线性函数

$$y=ax+b$$

来反映变量x与y之间的关系．问题是如何选择一条最"合理"的线性函数．因为点(x_1, y_1)，…，(x_n, y_n)一般并不是真正同处在一条直线上，对于某条直线$y=ax+b$，如果点(x_i, y_i)恰好在此直线上，则应满足

$$y_i=ax_i+b;$$

否则y_i与ax_i+b就有一定的偏差．我们用

$$\varepsilon_i=y_i-(ax_i+b)$$

来描述这个偏差(参看图2.9)．因为ε_i可以是正的，也可以是负的，因此我们不能用$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$描述这组数据与直线$y=ax+b$的总偏差．但是

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

却在一定意义下，反映了这组数据与直线$y=ax+b$的偏差程度．上式中ε是参数a和b的函数，把它

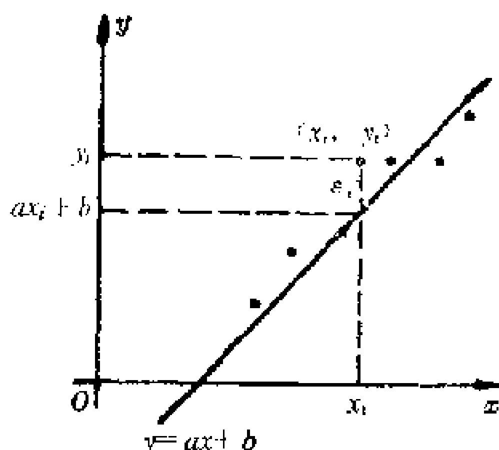


图 2.9

记为$\varepsilon=\varepsilon(a, b)$．我们要求找到使$\varepsilon$达到最小的一组参数$a$、$b$，换句话说，就是要求函数$\varepsilon=\varepsilon(a, b)$的极小值点．对于这一求极小值点的问题，我们用下列数学符号来表示：

$$\min \varepsilon(a, b).$$

用这样的方法所确定的直线$y=ax+b$就称为对于数组(x_1, y_1)、…、(x_n, y_n)在最小二乘意义下拟合最佳的直线．易知$\varepsilon(a, b)$的一阶偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}&=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-x_i)\\&=-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2b\sum_{i=1}^{n}x_i,\end{aligned} \qquad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial b}&=\sum_{i=1}^{n}-2(y_i-ax_i-b)\\&=-2\sum_{i=1}^{n}y_i+2a\sum_{i=1}^{n}x_i+2nb.\end{aligned}\tag{2.56}$$

由 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}=0$ 和 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b}=0$，可得下述方程组：

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

求解方程组，得到用二阶行列式表示的一组解：

$$\begin{cases}a=\dfrac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}y_i & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}},\\[2em] b=\dfrac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{vmatrix}}.\end{cases}\tag{2.57}$$

例 4　求一条对于数组 (0, 1)、(1, 3)、(2, 2)、(3, 4)、(4, 5) 在最小二乘意义下拟合最佳的直线.

解　易知对于这组数据有：

$$n=5,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=10,\ \sum_{i=1}^{n}y_i=15,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=30,\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=39.$$

把这些数值代入式(2.57)，便得

$$\begin{cases} a=\dfrac{\begin{vmatrix}39 & 10\\ 15 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}30 & 10\\ 10 & 5\end{vmatrix}}=\dfrac{195-150}{150-100}=0.9, \\ b=\dfrac{\begin{vmatrix}30 & 39\\ 10 & 15\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}30 & 10\\ 10 & 5\end{vmatrix}}=\dfrac{450-390}{150-100}=1.2. \end{cases}$$

注意到式(2.55)和(2.56)，便可得 $\varepsilon(a, b)$ 的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial a^2}=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial a\,\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial b^2}=2n.$$

因此在 $(a, b)=(0.9, 1.2)$ 处，$A=60$, $B=20$, $C=10$, $B^2-AC=-200<0$. 由此可知这点就是 $\varepsilon=\varepsilon(a, b)$ 的一个严格极小值点. 这一点又是函数 $\varepsilon(a, b)$ 的唯一逗留点. 所以 $(0.9, 1.2)$ 是 $\varepsilon(a, b)$ 的一个最小值点. 于是直线

$$y=0.9x+1.2$$

就是对于给定数组在最小二乘意义下拟合最佳的直线.

3. 条件极值

在许多实际问题中往往要在对自变量有一定限制的条件下，求某个多元函数的极值. 例如，要求自变量 x、y、z 在满足 $G(x, y, z)=0$ 的限制条件下，求函数 $u=F(x, y, z)$ 的极小值点. 我们把这个问题写成下列数学形式：

$$\begin{aligned} &\min u=F(x, y, z); \\ &\text{s. t.}\quad G(x, y, z)=0, \end{aligned} \tag{2.58}$$

其中 s. t. 为英文 subject to 之缩写，意即"受限制于". 如果问题是求函数 $u=F(x, y, z)$ 的极大值点，则把上式中的 min 改成 max. 我们把要求极值点的函数 $(u=F(x, y, z))$ 称为目标函数，关于自

变量的限制条件 $(G(x, y, z)=0)$ 称为约束条件.

下面讨论问题(2.58)的求解方法. 设 F 和 G 的各个一阶偏导数均存在且连续, 而且 $\frac{\partial G}{\partial z}\neq 0$, 则根据定理 2.8, 由 $G(x,y,z)=0$ 可确定一个函数 $z=z(x,y)$, 它的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}. \tag{2.59}$$

于是(2.58)求条件值的问题就化成求函数

$$u=F(x, y, z(x, y))$$

的极值问题. 应用复合函数求导法则和式(2.59), 便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=F_x-\frac{G_x}{G_z}F_z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=F_y-\frac{G_y}{G_z}F_z.$$

由定理 2.10 知, 若 (x_0, y_0) 为 $u=F(x, y, z(x, y))$ 的极值点, $z_0=z(x_0, y_0)$, 则极值点 (x_0, y_0, z_0) 必须满足条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 即我们所求的问题(2.58)的解 (x_0, y_0, z_0) 必须满足方程

$$\begin{cases} F_x-\frac{G_x}{G_z}F_z=0, \\ F_y-\frac{G_y}{G_z}F_z=0. \end{cases} \tag{2.60}$$

若记

$$\frac{F_z(x_0, y_0, z_0)}{G_z(x_0, y_0, z_0)}=-\lambda, \tag{2.61}$$

则由(2.60)和(2.61)便知 (x_0, y_0, z_0) 必须满足下列方程组:

$$\begin{cases} F_x+\lambda G_x=0, \\ F_y+\lambda G_y=0, \\ F_z+\lambda G_z=0. \end{cases} \tag{2.62}$$

因此, (x_0, y_0, z_0) 除了应满足约束条件 $G(x, y, z)=0$ 外, 还应满足方程组(2.62).

我们现在引入下列关于条件极值问题(2.58)的拉格朗日函数:

$$L(x, y, z, \lambda)=F(x, y, z)+\lambda G(x, y, z). \tag{2.63}$$

L_x、L_y、L_z、L_λ 分别为 $L(x, y, z, \lambda)$ 的关于变量 x、y、z、λ 的一阶偏导数. 于是函数 $L(x,y,z,\lambda)$ 的极值点必须满足下列方程组:

$$\begin{cases} L_x=F_x+\lambda G_x=0, \\ L_y=F_y+\lambda G_y=0, \\ L_z=F_z+\lambda G_z=0, \\ L_\lambda=G(x, y, z)=0. \end{cases} \tag{2.64}$$

这个条件也就是条件极值问题(2.58)的极值点(x_0, y_0, z_0)所必须满足的条件. 通过求方程组(2.64), 解出 x、y、z、λ, 再研究相应的(x, y, z)是否确是问题(2.58)的解. 这种方法就称为拉格朗日乘数法, 其中 λ 称为拉格朗日乘数.

例 5 试从斜边长为 l 的直角三角形中找一个周长最长的直角三角形(参看图 2.10).

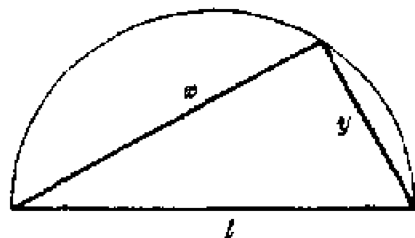


图 2.10

解 设直角三角形的两直角边的边长分别为 x 和 y, 则以 l 为斜边边长的直角三角形的周长 c 就是 x、y 的函数

$$c=F(x, y)=x+y+l.$$

根据勾股定理, 变量 x、y 必须满足下列条件:

$$G(x, y)=x^2+y^2-l^2=0.$$

这样, 我们所求的条件极值问题即可表示为

$$\max\ c=x+y+l,$$
$$\text{s. t.}\quad x^2+y^2-l^2=0.$$

实际上还应要求 $x>0$, $y>0$. 作相应的拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

求解方程组:

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=1+2\lambda y=0, \\ L_\lambda=x^2+y^2-l^2=0. \end{cases}$$

用 $x=-\dfrac{1}{2\lambda}$, $y=-\dfrac{1}{2\lambda}$ 代入方程 $x^2+y^2-l^2=0$, 便得

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\,l},$$

但 x、y 不能为负，故得

$$\begin{cases} x=\dfrac{l}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

显然，就这个问题而言，解肯定存在．因此所求得的唯一可能的极值点就是它的解．

例 6　试求椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上的点 $(a,\ b)$，使得椭圆在该点处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为最小．

解　由隐函数求导，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+y}{x+3y}.$$

故椭圆在点 $(a,\ b)$ 处的切线方程为

$$(3a+b)(x-a)+(a+3b)(y-b)=0.$$

它与两坐标轴的交点分别为

$$\left(\frac{(a+3b)b}{3a+b}+b,\ \ 0\right),\ \left(0,\ \ \frac{(3a+b)a}{a+3b}+b\right).$$

所以此切线与两坐标轴所围成的三角形面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{(a+3b)b}{3a+b}+a\right|\cdot\left|\frac{(3a+b)a}{a+3b}+b\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(3a^2+2ab+3b^2)^2}{(3a-b)(a+3b)}\right|.$$

因 $(a,\ b)$ 在椭圆上，所以有

$$3a^2+2ab+3b^2=1.$$

于是
$$S=\frac{1}{2}\,\frac{1}{|(3a+b)(a+3b)|}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{|8ab+1|}$$

求 S 的极小点就相当于求函数 $(1+8ab)^2$ 的极大值点．故可把上述问题化成为下列条件极值问题：

$$\max\ (1+8ab)^2,$$

$$\text{s. t.}\quad 3a^2+2ab+3b^2-1=0.$$

作拉格朗日函数

$$L(a,\ b,\ \lambda)=(1+8ab)^2+\lambda(3a^2+2ab+3b^2-1),$$

求解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial a}=2(1+8ab)(8b)+6\lambda a+2\lambda b=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial b}=2(1+8ab)(8a)+2\lambda a+6\lambda b=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=3a^2+2ab+3b^2-1=0.\end{cases}$

将方程 $\dfrac{\partial L}{\partial a}=0$ 与 $\dfrac{\partial L}{\partial b}=0$ 相加，便得

$$16(a+b)(1+8ab)+8\lambda(a+b)=0.$$

由此可得 $b=-a.$

将 $b=-a$ 代入方程 $\dfrac{\partial L}{\partial a}=0$，便得

$$16a(1-8a^2)+4\lambda a=0.$$

显然 $a\neq 0$，否则 $b=0$，但 $(0,\ 0)$ 不在椭圆 $3a^2+2ab+b^2=1$ 上. 于是有

$$4(8a^2-1)+\lambda=0.$$

将 $b=-a$ 代入方程 $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$，便得

$$4a^2-1=0.$$

由方程组 $\begin{cases}4(8a^2-1)+\lambda=0,\\ 4a^2-1=0,\\ a=-b,\end{cases}$

易得两组解: $\begin{cases}\lambda=-4,\\ a=\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=-4,\\ a=-\dfrac{1}{2},\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

同样，如将 $\dfrac{\partial L}{\partial a}=0$ 与 $\dfrac{\partial L}{\partial b}=0$ 相减，便可得到 $a=b$，由此可得另外两组解:

$$\begin{cases} \lambda=-4, \\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda=-4, \\ a=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ b=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

此四组解相应的三角形的面积 S 的值依次为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$. 这个问题的解显然是存在的, 故所求的 (a, b) 共有两组解.

$$\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ b=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

下面我们再考察更为一般的条件极值问题:

$$\begin{aligned} &\min u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\text{s.t.}\quad h_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad h_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0. \end{aligned} \tag{2.65}$$

设 $f, h_1, \cdots, h_m$ 的各种一阶偏导数均存在且连续, 而且

$$\frac{D(h_1, \cdots, h_i, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_{n-m+i}, \cdots, x_n)} \neq 0, \tag{2.66}$$

根据定理 2.9, 方程组 $h_i(x_1, \cdots, x_n)=0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 确定了一组函数

$$x_{n-m+k}=g_k(x_1, x_2, \cdots, x_{n-m})\ (k=1, 2, \cdots, m), \tag{2.67}$$

它们的偏导数

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{D(h_1, \cdots, h_k, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_j, \cdots, x_n)}}{\dfrac{D(h_1, \cdots, h_k, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_{n-m+k}, \cdots, x_n)}}$$

$$(k=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n-m). \tag{2.68}$$

这样, 条件极值问题 (2.65) 就化成求函数

$$u=f(x_1, \cdots, x_{n-m}, g_1(x_1, \cdots, x_{n-m}), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_{n-m}))$$

的极值问题.

现把式(2.68)中的函数行列式 $\dfrac{D(h_1, \cdots, h_k, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_j, \cdots, x_n)}$ 按它的第 k 列展开,便有

$$\frac{D(h_1, \cdots, h_k, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_j, \cdots, x_n)}=\sum_{i=1}^{m} A_{ij}^{(k)}\frac{\partial h_i}{\partial x_j},$$

其中 $A_{ij}^{(k)}$ 为此行列式中 $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$ 之代数余子式. 于是

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}-A_{ij}^{(k)}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\Big/\frac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}.$$

所以函数 u 关于 $x_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 的偏导数可写成下列形式:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j}&=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+k}}\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}-\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+k}}\cdot A_{ij}^{(k)}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\Big/\frac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}-\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+k}}\cdot A_{ij}^{(k)}\Big/\frac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}\right)\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_j}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{D_i(h_1, \cdots, h_m)}{D_i(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}\Big/\frac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}\right)\frac{\partial h_i}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{D_i(h_1, \cdots, h_m)}{D_i(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}$ 为将行列式 $\dfrac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}$ 的第 i 行元素依次用 $\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}}, \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-m+2}}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ 替代后所得的行列式.

若令

$$\lambda_i=-\frac{D_i(h_1, \cdots, h_m)}{D_i(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)}\Big/\frac{D(h_1, \cdots, h_m)}{D(x_{n-m+1}, \cdots, x_n)},$$

则可得

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=f_{x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial h_i}{\partial x_j}.$$

于是函数 $u=f(x_1, \cdots, x_{n-m}, g_1(x_1, \cdots, x_{n-m}), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_{n-m}))$ 的**极值点**所必须满足的条件，就是条件极值问题(2.65)的**拉格朗日函数**:

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)=f(x_1, \cdots, x_n)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (2.69)$$

的极值点所必须满足的条件:

$$\begin{cases} f_{x_1}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial h_i}{\partial x_1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{x_n}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial h_i}{\partial x_n}=0, \\ h_1(x_1, \cdots, x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_m(x_1, \cdots, x_n)=0. \end{cases} \qquad (2.70)$$

例 7 求解: $\min x^2+y^2+z^2$,

$$\text{s. t.} \quad x+y+z=0,$$
$$x^2+y^2+4z^2-1=0.$$

解 作它的拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z)$$
$$+\mu(x^2+y^2+4z^2-1).$$

令它的一阶偏导数都等于零,便得到方程组:

$$\begin{cases} L_x=2(1+\mu)x+\lambda=0, \\ L_y=2(1+\mu)y+\lambda=0, \\ L_z=2(1+4\mu)z+\lambda=0, \\ L_\lambda=x+y+z=0, \\ L_\mu=x^2+y^2+4z^2-1=0. \end{cases}$$

先将方程 $L_x=0$ 乘 $1+4\mu$, 方程 $L_y=0$ 乘 $1+4\mu$, 方程 $L_z=0$ 乘 $1+\mu$, 再把所得的三个方程相加便得

$$3\lambda(1+3\mu)=0.$$

(1) 如果 $\lambda=0$, 则将方程 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_z=0$ 相加便得

$$6\mu z=0.$$

但此时 $\mu\neq0$, 否则由 $\lambda=0, \mu=0$, 可从方程 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_z=0$

中分别导出 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 的结果，而这个结果与方程 $L_\mu=0$ 是矛盾的，因而只可能 $z=0$. 将 $z=0$ 代入方程 $L_\lambda=0$ 和 $L_\mu=0$，可得到两个解

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right) \text{ 和 } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).$$

它们与坐标原点(0, 0, 0)的距离之平方(即相应的 $x^2+y^2+z^2$) 均为1.

(2) 如果 $1+3\mu=0$，则从方程 $L_x=0$, $L_y=0$, $L_z=0$ 可以分别得到

$$x=-\frac{3}{4}\lambda,\ y=-\frac{3}{4}\lambda,\ z=\frac{3}{2}\lambda. \tag{2.71}$$

代入方程 $L_\mu=0$，便得

$$\frac{9}{16}\lambda^2+\frac{9}{16}\lambda^2+9\lambda^2-1=0.$$

由此解得

$$\lambda=\pm\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

代入式(2.71)，便得到两个解：

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{6},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \text{和} \left(-\frac{\sqrt{2}}{6},\ -\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

它们与坐标原点(0, 0, 0)距离之平方均为$\frac{5}{9}$.

曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 是一个椭球面，它与平面 $x+y+z=0$ 之交线为一个以原点 O 为中心的椭圆(见图 2.11). 我们得到的四个解就是此椭圆的四个顶点，因而其中两个为极大值点，两个为极小值点. 所以

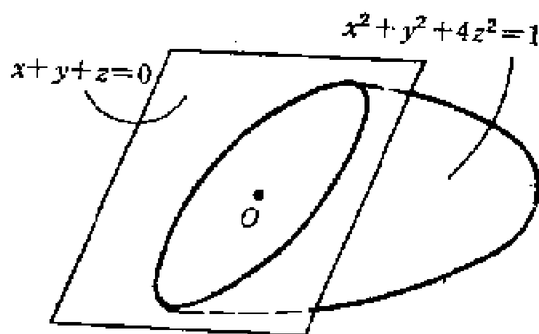


图 2.11

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{6},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \text{和} \left(-\frac{\sqrt{2}}{6},\ -\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

就是我们要求的解.

习　题

§ 1

1. 指出下列各函数的定义域:

(1) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$;　　(2) $z=\ln(x-y)\quad(x>1)$;

(3) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$;　　(4) $u=\frac{1}{\sqrt{x-y+z}}$;

(5) $u=\arcsin\frac{y+z}{x}\quad(x>1)$;

(6) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{r^2-x^2-y^2-z^2}\quad(R>r>0)$.

2. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$.

3. 试指出一个$\delta>0$的数值，使得当点$M(x, y)$为原点O的δ邻域中任一非$(0, 0)$点时，不等式$|f(x, y)-f(0, 0)|<\varepsilon$成立:

(1) $f(x, y)=x^2+y^2$, $\varepsilon=0.01$;

(2) $f(x, y)=\frac{y}{1+x^2}$, $\varepsilon=0.001$.

4. 试说明函数极限$\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{x-y}{x+y}$不存在.

5. 试讨论函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在$(0, 0)$处的连续性.

6. 试证明函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

对于变量x或y分别是连续的，但$f(x, y)$在$(0, 0)$点处不连续.

7. 指出下列函数的不连续点集:

(1) $z=\frac{1}{x-y}$;　　(2) $z=\sec(x-y)$;

(3) $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$;　　(4) $z=\operatorname{ctg}\frac{x}{y}$.

§ 2

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=xy+2y^2$;　　(2) $z=x\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $z=x\arcsin(x+y)$;　　(4) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $z=e^{-2y}\cos 3x$;　　(6) $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$;

(7) $u=e^{3x+4y}\cos(2x+5z)$;　　(8) $u=z\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$;

(9) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(10) $u=(x)^{yz}$.

2. 求下列函数在指定点处的偏导数值:

(1) $z=2x^2-y^2-x+3y+4$ 在$(1, -2)$处;

(2) $z=(1+xy)^y$ 在$(1, 1)$处;

(3) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　在$(1, 2, -2)$处;

(4) $u=\cos 2x\cdot\operatorname{sh}2y\cdot\operatorname{ch}2z$在$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$处.

3. 设$z=\ln(x+y)$. 求证: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

4. 设$z=\frac{x^2y^2}{x+y}$. 求证: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$.

5. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\arcsin\frac{x}{y}$;　　(2) $w=\frac{s+t}{s-t}$;

(3) $z=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{xy}$;　　(4) $u=xy^2z^3$;

(5) $u=xz+y^3\sin(x+z)$;　　(6) $u=x^{yz}$.

6. 试求函数$z=x^2y^3$在$(2, -1)$处, 当$\Delta x=0.02$, $\Delta y=-0.01$时的全增量和全微分.

7. 试求函数$z=\frac{xy}{x^2+y^2}$在$(2, -1)$处, 当$\Delta x=0.01$, $\Delta y=-0.02$时的全增量和全微分.

8. 当圆罐的底半径R由2米膨胀到2.02米, 高H由5米膨胀到5.03米时, 它的容积增加了多少?试用全微分求容积增加的近似值.

9. 原扇形的中心角$\alpha=60°$, 半径$R=60$厘米. 当中心角增加$1°$时, 为使扇形面积保持不变, 它的半径应缩小多少厘米?(应用全微分作近似计算).

10. 求下列复合函数的全导数或偏导数:

(1) $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$，$x=\operatorname{ch} t$，$y=\operatorname{sh} t$，求 $\dfrac{dz}{dt}$；

(2) $u=x^2+y^2+z^2$，$x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$，求 $\dfrac{du}{dt}$；

(3) $u=\ln(e^x+e^y)$，$y=x^3$，求 $\dfrac{du}{dx}$；

(4) $z=x^2y-xy^2$，$x=u\cos v$，$y=u\sin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$；

(5) $u=\ln(x^2+y^2-2z)$，$x=r+s$，$y=r-s$，$z=2rs$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$，$\dfrac{\partial u}{\partial s}$；

(6) $u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$，$x=s+t$，$y=s-t$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

11. 设函数 $w=f(u, v)$ 具有一阶连续偏导数，已知其中 $u=x^2-y^2$，$v=e^{x+y}$. 试求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$，$\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

12. 设 $u=f(z)$ 为一个可微函数，$z=ax+by$，其中 a、b 为常数. 求证：

$$a\frac{\partial u}{\partial y}=b\frac{\partial u}{\partial x}.$$

13. 设 $w=F(x, y, z)$，$z=f(x, y)$，$y=\varphi(x)$，且函数 F，f，φ 都是可微的. 求全导数 $\dfrac{dw}{dx}$.

14. 设函数 $w=f(u, v)$ 具有一阶连续偏导数，$u=x+y$，$v=x-y$. 求证：

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

15. 设方程组

$$\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3 \end{cases}$$

定义了 x 和 y 的函数 z（其中参数 u、v 可取一切可能的实数）. (1) 求函数 $z=z(x, y)$ 的定义域；(2) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. 求曲面 $z=2x^2+4y^2$ 在点 $(2, 1, 12)$ 处的切平面和法线方程.

17. 求曲面 $z=-\sqrt{x^2+y^2-18}$ 在点 $(3, 5, -4)$ 处的切平面和法线方程.

18. 在曲面 $z=xy$ 上求一点 $M(x, y, z)$，使曲面在该点处的法线向量垂直于平面 $x+3y+z+9=0$.

§ 3

1. 求下列函数的高阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=x\ln(x+y)$；　　(2) $z=\sin^2(ax+by)$；

(3) $z=y^x$；　　(4) $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$；

(5) $z=\left(1+\ln\frac{x}{y}\right)^3$;　　　(6) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2. 设函数 $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. 试验证: $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. 试验证: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求证: $\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}$.

5. 设 $z=f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续, $u=x+ay$, $v=x-ay$. 其中 a 为常数. 求证: $a^2z_{xx}-z_{yy}=4a^2z_{uv}$.

6. 已知 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f、g 均二次可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7. 设 $u=u(x,y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数, 且 u 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

试求 a、b 的值, 使方程在变量代换 $\xi=x+ay$, $\eta=x+by$ 之下, 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 的形式.

8. 已知 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, 试计算 $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}$.

9. 设 $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

10. 若函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数 f_x 和 f_y 都存在且连续, 试证明下列中值定理:

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)-f(x,y)&=f_x(x+\theta h,y+\theta k)h\\&\quad+f_y(x+\theta h,y+\theta k)k,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$.

11. 试求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 展开式, 至三次项为止.

12. 试求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 处的 Taylor 展开式.

13. 试求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 展开式, 至 n 项为止.

§ 4

1. 求下列隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $x^3+y^3-3xy=0$;　　　(2) $xy-\ln y+\ln(1+x)=0$;

(3) $e^x-xy+\sin y=0$;　　　(4) $e^x\sin y-e^y\cos x=1$.

2. 求下列隐函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$：

(1) $yz^2-xz+xy-4=0$;　　　　(2) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$;

(3) $e^z-xyz=0$;　　　　(4) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=0$.

3. 设 $F\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)=0$. 证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

4. 设 $\varphi(u,\ v)$是可微函数，且由方程 $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$ 可确定函数 $z=f(x,\ y)$. 试证明 $z=f(x,\ y)$满足方程：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c,$$

其中 a、b、c 为常数.

5. 设 $f(x,\ y,\ z)=x^2yz^3$，其中 $z=z(x,\ y)$是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数，求 $f_x(1,\ 1,\ 1)$.

6. 设 $x^3+y^3-3xy=0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 设 $z=f(x,\ y)$是由方程 $F\left(y+\frac{1}{x},\ z+\frac{1}{y}\right)=0$ 所確定的．试用 F 关于第一变元和第二变元偏导数 F_1' 和 F_2' 表示 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. 求由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 确定的隐函数 z 的二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 设 $\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 试求：$\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$.

11. 设 $\begin{cases}xu-yv=0,\\yu+xv=1,\end{cases}$ 试求：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

12. 试求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程：

(1) $x^2+xy^2+y^2+xz+1=0$, 在$(2,\ -3,\ 2)$处；

(2) $2x^2-3y^2+4z^2=6$, 在$(1,\ -1,\ 1/2)$处；

(3) $e^z-z-xy=3$, 在$(2,\ 1,\ 0)$处.

13. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$上任一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

14. 试证曲面 $xyz=a^3(x>0,\ y>0,\ z>0)$上任一点处的切平面与 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 三个坐标平面围成的四面体的体积是一个常数.

15. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点$(1,\ -2,\ 1)$处的法平面及切线方程.

16. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases}$ 在点$(-1,\ -2,\ 3)$处的法平面和切线方程.

17. 求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 的平行于平面 $2x-3y+2z+1=0$ 的切平面方程.

18. 证明曲面 $xy=z^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=9$ 正交.

19. 求曲面

$$\begin{cases} x=e^u\cos v, \\ y=e^u\sin v, \\ z=e^u \end{cases}$$

在 $(u,\ v)=\left(-1,\ \frac{\pi}{4}\right)$处的切平面方程.

§ 5

1. 试求下列函数的极值点:

(1) $z=x^2+xy+y^2-6x+2$;

(2) 由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,\ y)$;

(3) $u=xy+\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}$, 其中 $a>0,\ b>0$ 均为常数;

(4) $u=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 2\pi)$.

2. 对下列各数组在最小二乘意义下求拟合最佳的直线:

(1) $(-1,\ 2),\ (0,\ 1),\ (3,\ -1)$;

(2) $(-2,\ 0),\ (0,\ 2),\ (2,\ 3)$;

(3) $(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3)$.

3. 对一组数据$(x_1,\ y_1),(x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$, 试在最小二乘意义下求拟合最佳的二次曲线 $y=ax^2+bx+c$ 的系数 a、b、c.

4. 求函数 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 在 $y=x+2,\ x=0,\ y=0$ 所围成的平面闭区域内的最大值和最小值.

5. 求下列条件极值:

(1) $\min z=x^2+y^2$,

　　s. t. $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a>0,\ b>0)$;

(2) $\min z=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$, $\quad$ s. t. $\quad x^2+y^2-1=0$;

(3) $\min u=x+y+z$,

　　s. t. $\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$;

(4) $\max u=xyz$, $\quad$ s. t. $\quad \begin{cases} x-y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

6. 把正数 a 分解成三个正数之和，使此三正数的积为最大.

7. 试用极值方法求直线 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 与直线 $x=y-3=z$ 之间的最短距离.

8. 试求椭球面 $\frac{1}{96}x^2+y^2+z^2=1$ 上与平面 $3x+4y+12z=288$ 的距离为最近的点与最远的点.

9. 设两正数 x 与 y 之和为 a，求函数 $f(x, y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 的条件极值，并证明 $\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$n$ 为正整数.

10. 欲造一无盖的长方形容器，已知底部造价为每平方米3元，侧面造价均为每平方米 1 元. 现用 36 元造一个容积最大的容器，问其尺寸各为多少?

11. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积为最小，并求出切点坐标及四面体的体积.

12. 给定 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，试求函数 $z=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 在 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ 的条件下的最大值.

第三章 重 积 分

在讨论一元函数的微积分时，我们知道定积分有着广泛的应用，一些实际问题，例如计算曲边形面积、曲线的弧长、变力作功等等问题，都可以归结成为求定积分的问题．但定积分中被积函数一定要是一个一元函数，积分区域只能是一维空间内的区间．而在计算体积、曲面面积、不均匀物体的质量和物体的转动惯量时，往往涉及到被积函数是一个多元函数，积分区域是一个高维空间中的区域，这就需要对定积分的概念加以推广．

本章我们将着重考察被积函数是一个二元函数，积分区域是二维空间中的区域这种二重积分情况，再将所得的结果平行地推广到三重积分．当然对更一般的多重积积分也可作类似的考虑．

§1 二 重 积 分

1．二重积分的概念

在讨论定积分时，我们曾以曲边梯形面积计算为例引进定积分．与此相类似，我们将以顶为曲面的柱体(以下简称曲顶柱体)体积计算为例引进二重积分．

设二元函数 $z=f(x, y)$ 是定义于有界闭区域 D 上的连续函数，且在区域 D 上 $f(x, y)\geqslant 0$．它的图形为曲面 S．现在考察如下柱体：顶为曲面 S，底为区域 D，侧面是以 D 的边界线为准线，母线平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的柱面(见图 3.1)．此柱体的体积为 V．

为了计算体积 V，我们把区域 D 分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$．曲顶柱体也就相应地分成 n 个分别以 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 为底的小柱体，它们的体积分别记为 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$．若点 (x_i, y_i) 为小区域 $\Delta\sigma_i$ 中的任一点，不妨同时用 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域

$\Delta\sigma_i$ 的面积，则 $f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 就是底面积为 $\Delta\sigma_i$、高为 $f(x_i, y_i)$ 的平顶小柱体的体积．因而，对于以 $\Delta\sigma_i$ 为底的曲顶小柱体的体积 ΔV_i，就可用上述平顶小柱体的体积来近似代替，即

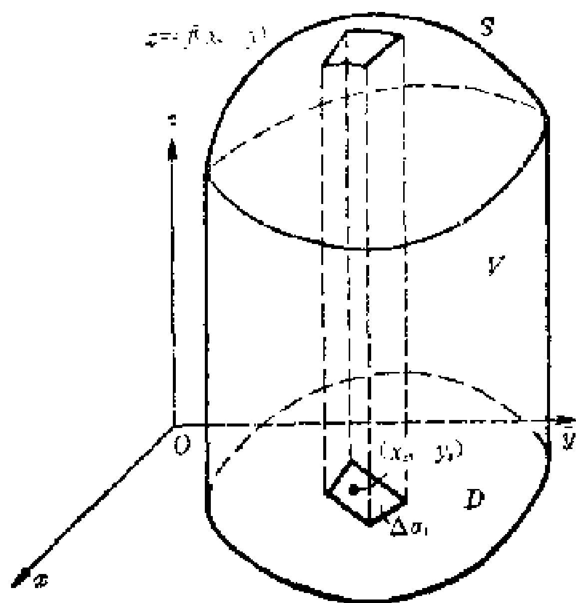


图 3.1

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

于是整个曲顶柱体的体积 V 可以近似地表示成

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

当小区域 $\Delta\sigma_i$ 很"小"时，由于 $f(x, y)$ 是一个连续函数，因而小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任两点的函数值相差很小．也就是说，当小区域 $\Delta\sigma_i$ 越"小"时，$f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 就越接近于 ΔV_i．我们用小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径

$$d_i=\max\{|\overrightarrow{M_1M_2}|\,|M_1, M_2 \text{ 为 } \Delta\sigma_i \text{ 内任意两点}\}$$

来描述区域 $\Delta\sigma_i$ 的"大小"程度．令

$$d=\max\{d_i|i=1, 2, \cdots, n\}. \tag{3.1}$$

因此当 d 充分小时，每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 也都充分小，从而每个曲顶小柱体的体积 ΔV_i 与 $f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 之间的差值也充分小．于是和式 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 的极限就取作为曲顶柱体的体积 V，即

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

将以上求和式极限的做法一般化，可得以下二重积分的定义．

定义 3.1 设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有定义．将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\cdots$, $\Delta\sigma_n$（同时用 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积，$i=1, 2, \cdots, n$），并在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$．如果下列极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \tag{3.2}$$

存在(其中 d 由式(3.1)给出)，且极限值与小区域 $\Delta\sigma_i$ 的分法以及点(x_i, y_i)的取法都无关，则此极限值称为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$. 即

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i, \tag{3.3}$$

其中 D 称为积分区域，$f(x, y)$ 称为被积函数，$d\sigma$ 称为面积元素.

因为极限值(3.3)与小区域$\Delta\sigma_i$的形状无关，所以在直角坐标系内，我们可采用分别平行于 x 轴和 y 轴的两组平行线组成的矩形网格来分割区域 D(见图3.2). 小矩形 $\Delta\sigma$ 的边长分别为 Δx 和 Δy. 因此，它的面积

$$\Delta\sigma = \Delta x\Delta y.$$

于是式(3.3)中的面积元素便可写成

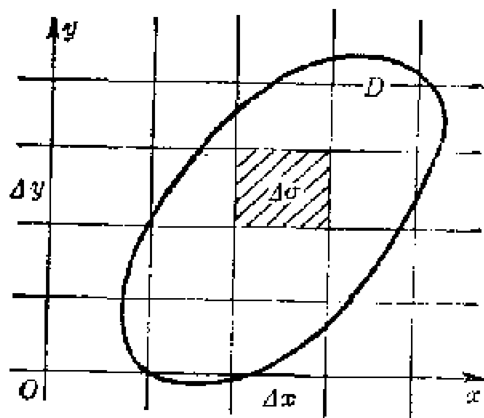


图 3.2

$$d\sigma = dx\,dy. \tag{3.4}$$

这样，二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 又可写成

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy. \tag{3.5}$$

当一元连续函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的值可取任意实数时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义为$[a, b]$上曲边梯形面积的代数和. 同样，当二元连续函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的值可取任意实数时，二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ 的几何意义应是区域 D 上曲顶柱体的体积的代数和.

类似于定积分，我们可以证明：当 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数时，极限(3.3)必存在，且此极限值与小区域 $\Delta\sigma_i$ 的分法以及点 (x_i, y_i) 的取法都无关。把这个结论叙述成如下的定理形式，但不再给予具体的论证。

定理 3.1 设函数 $f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的连续函数，则 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分必存在。

从定义 3.1 还容易得到下列定理：

定理 3.2 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的二重积分存在，则函数 $f(x, y)$ 在 D 上必是有界的。

因为二重积分和定积分一样都是以和式的极限形式定义的，因此二重积分也具有与定积分相类似的一些性质。

性质 1 常数因子可以从积分号内提出，即如果 k 为常数，则有

$$\iint_D kf(x, y)\,d\sigma = k\iint_D f(x, y)\,d\sigma. \tag{3.6}$$

性质 2 两个函数之和的积分等于它们各自的积分之和，即

$$\iint_D [f(x, y)+g(x, y)]\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,d\sigma + \iint_D g(x, y)\,d\sigma. \tag{3.7}$$

性质 3 当积分区域分成两部分时，整个区域上的积分就等于两个部分区域上的积分之和。即当区域 D 分成 D_1、D_2 两个区域时，有

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\,d\sigma. \tag{3.8}$$

性质 4 如果在区域 D 上 $f(x, y)\leqslant g(x, y)$ 恒成立，则有

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma \leqslant \iint_D g(x, y)\,d\sigma. \tag{3.9}$$

性质 5 如果区域 D 的面积为 σ，则

$$\iint_D d\sigma = \sigma. \tag{3.10}$$

性质 6 如果 M 和 m 分别为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值和最小值，σ 为区域 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x, y) d\sigma \leqslant M\sigma. \tag{3.11}$$

性质 7(**中值定理**) 设 $f(x, y)$ 为有界闭区域 D 上的连续函数，σ 为区域 D 的面积，则在区域 D 内必存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma. \tag{3.12}$$

2. 二重积分的积分区域

二重积分可以转化成二次单积分进行计算. 进行这种转化首先必须熟悉积分区域 D 的各种分析表达方式. 例如，对于图 3.3 所给出的矩形区域 D，我们可以把它表达成下列形式：

$$D: \ a \leqslant x \leqslant b; \ c \leqslant y \leqslant d.$$

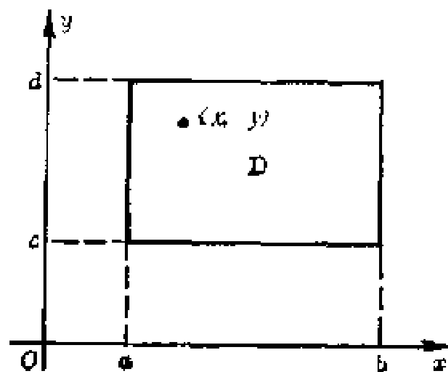


图 3.3

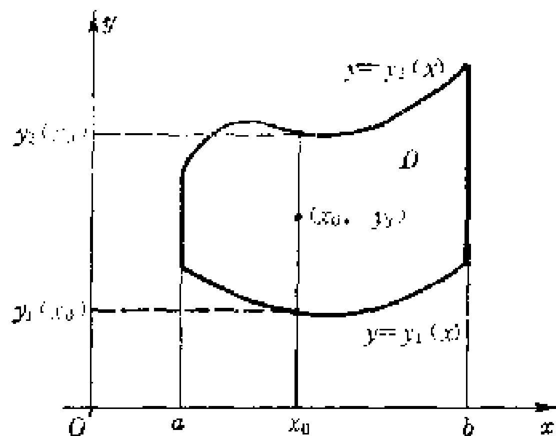


图 3.4

而图 3.4 所给出的区域是由两条直线 $x=a$, $x=b$ 以及两条曲线 $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ 所围成的. 这个区域 D 又应怎样表达呢？为此，我们考察 D 中任一点 (x_0, y_0) 的情况. 显然，这时对横坐标 x_0 应满足不等式

$$a \leqslant x_0 \leqslant b,$$

而对纵坐标 y_0，则应满足不等式

$$y_1(x_0) \leqslant y_0 \leqslant y_2(x_0).$$

于是，图 3.4 所给出的区域 D 可以表达成

$$D:\ a\leqslant x\leqslant b;\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x).\qquad(3.13)$$

凡是可用上述形式表达的区域 D，称为是关于 x 的简单区域.

例1 (1) 椭圆区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1(a>0,\ b>0)$(见图 3.5($a$))可表示成

$$D:\ -a\leqslant x\leqslant a;\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

(2) 圆形区域 $x^2+(y-2)^2\leqslant 1$(见图 3.5(b))可表示成

$$D:\ -1\leqslant x\leqslant 1;\ 2-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{1-x^2}.$$

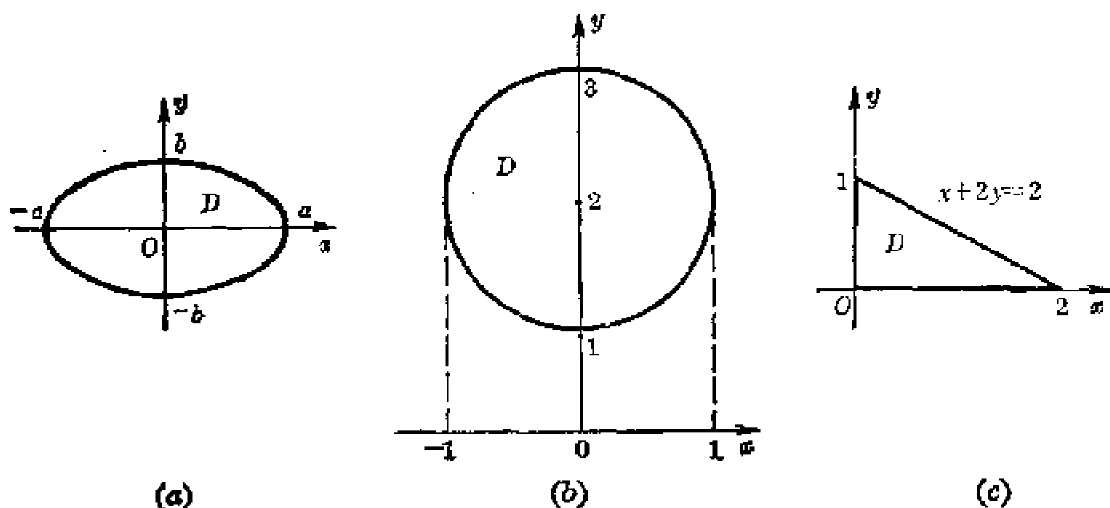


图 3.5

(3) 由直线 $x=0$, $y=0$ 和 $x+2y=2$ 所围成的三角形区域(见图 3.5(c))可表示成

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant 2;\ 0\leqslant y\leqslant 1-\frac{x}{2}.$$

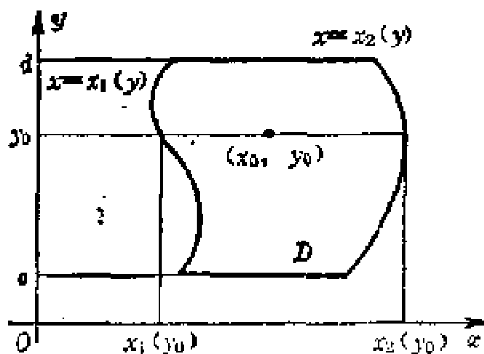


图 3.6

如果一个区域 D 是由两条直线 $y=c$, $y=d$ 和两条曲线 $x=x_1(y)$ 和 $x=x_2(y)$ 所围成(见图 3.6)，则它可表示成

$$D:\ c\leqslant y\leqslant d;\ x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y).\qquad(3.14)$$

并称这种区域为一个关于 y 的简单区域.

例2 (1) 上例中椭圆区域还可以表示成

$$D:\ -b\leqslant y\leqslant b;\ -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

(2) 上例中圆形区域还可以表示成

$$D:\ 1\leqslant y\leqslant 3;\ -\sqrt{1-(y-2)^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-(y-2)^2}.$$

(3) 上例中三角形区域还可以表示成

$$D:\ 0\leqslant y\leqslant 1;\ 0\leqslant x\leqslant 2-2y.$$

3. 二重积分的计算

我们将以顶为曲面的柱体的体积计算为例，说明如何把一个二重积分转化成一个二次积分. 现再考察图 3.1 给出的曲顶柱体的体积. 设 D 是一个关于 x 的简单区域，它可表示成

$$D:\ a\leqslant x\leqslant b;\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

$f(x, y)$是区域 D 上的一个连续函数. 我们以平面 $x=x_0(a\leqslant x_0\leqslant b)$去截这个柱体，所得的截面为一个曲边梯形. 设此曲边梯形的面积为 $S(x_0)$. 而曲边梯形的曲边即为曲面 $z=f(x, y)$在平面 $x=x_0$ 上的截口曲线，它在平面 $x=x_0$ 上的平面直角坐标系中可用一元函数 $z=f(x_0, y)$来描述. 因此从图 3.7(b)中容易看出，此曲边梯形的面积可用下列定积分计算：

$$S(x_0)=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)}f(x_0,\ y)dy.$$

这个定积分中积分变量为 y，x_0 为一个常数. 现把上述积分中的 x_0 改写成 x，即得

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,\ y)dy, \tag{3.15}$$

在这个积分中 x 是以常量身份参加的，称为参数，并且对于区间 $[a, b]$ 中任一给定的 x 都可得到式(3.15)的积分. 因而积分就是一个 x 的函数.

由定积分可知，顶为曲面的柱体中截面面积为 $S(x)$，厚度为 dx 的一片曲顶柱体可作为曲顶柱体的体积微元 dV，即

$$dV=S(x)dx.$$

因而整个曲顶柱体的体积 V 可写成下列定积分形式：

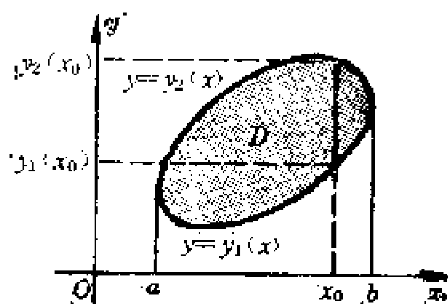


图 3.7 (a)

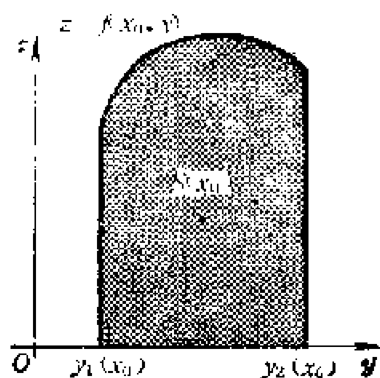


图 3.7 (b)

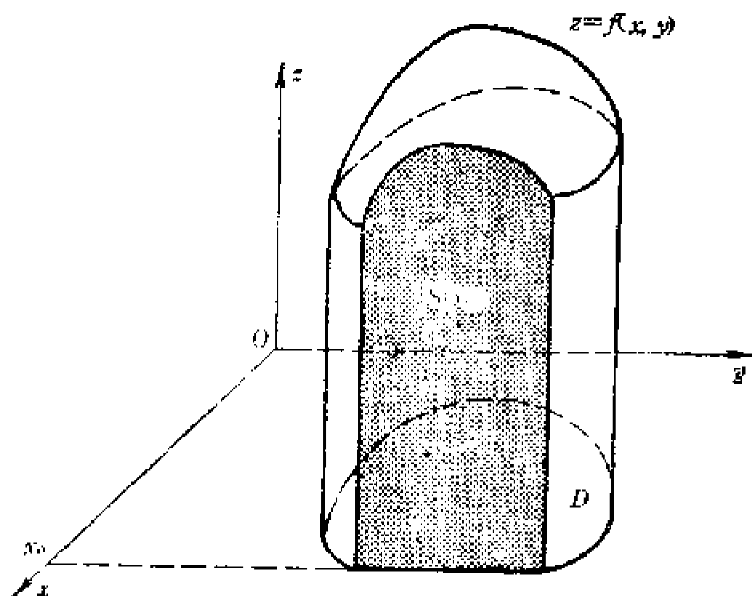


图 3.7 (c)

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

再把式(3.15)代入上式,便得

$$V=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy\right]dx.$$

从二重积分的几何意义便有

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy\right]dx. \qquad (3.16)$$

必须注意,式(3.16)右端的积分实际上表示先计算方括号中关于积分变量 y 的定积分,其中 x 是一个参数,其结果得到一个关于变量 x 的函数 $S(x)$(即式(3.15)),然后再计算关于积分变量 x 的定

积分$\left(\text{即}\int_a^b S(x)\,dx\right)$. 这样, 函数 $f(x, y)$在区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 就转化成一个二次积分. 我们把这个结论叙述成下列定理形式, 但不再给予严格的证明.

定理 3.3 设 $f(x, y)$为有界闭区域 D 上的连续函数, 区域 D 为关于 x 的简单区域, 它可表示为

$$D:\ a\leqslant x\leqslant b;\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx.$$

同样, 如果上述定理中区域 D 为关于 y 的简单区域, 它可表示为

$$D:\ c\leqslant y\leqslant d;\ x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),$$

其中 $x_1(y)$ 和 $x_2(y)$ 都是区间 $[c, d]$ 上的连续函数, 则

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx\right]dy. \tag{3.17}$$

例 3 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{2}+y}\,dx\,dy$, 其中 D: $0\leqslant x\leqslant 2$; $0\leqslant y\leqslant 1-\frac{x}{2}$.

解 由定理 3.3, 得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\frac{x}{2}+y}\,dx\,dy&=\int_0^2\left[\int_0^{1-\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}+y}\,dy\right]dx\\&=\int_0^2\left[e^{\frac{x}{2}+y}\Big|_{y=0}^{y=1-\frac{x}{2}}\right]dx=\int_0^2\left[e-e^{\frac{x}{2}}\right]dx\\&=\left(ex-2e^{\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^2=2.\end{aligned}$$

例 4 试将二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ 化成二次积分, 其中积分区域 D 为: (1) 由图 3.8(a)给出; (2) 由图 3.8(b)给出; (3)由图 3.8(c)给出

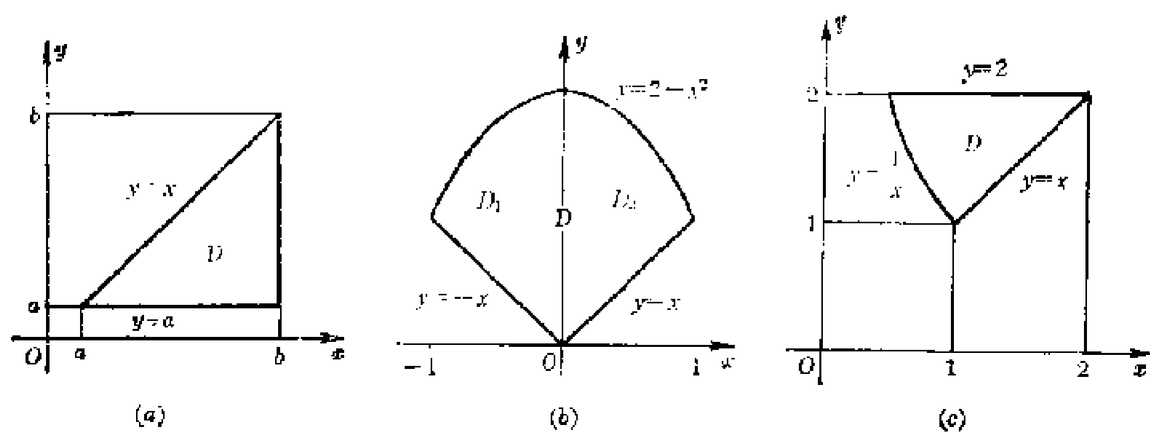


图　3.8

解　(1) 因为 D 可表示为

$$D:\ a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant x,$$

于是有
$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_a^x f(x,\ y)dy\right]dx.$$

(2) 先将区域 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，其中

$$D_1:\ -1\leqslant x\leqslant 0;\ -x\leqslant y\leqslant 2-x^2,$$
$$D_2:\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ x\leqslant y\leqslant 2-x^2.$$

于是有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,\ y)dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,\ y)dx\,dy$$
$$=\int_{-1}^0\left[\int_{-x}^{2-x^2} f(x,\ y)dy\right]dx$$
$$+\int_0^1\left[\int_x^{2-x^2} f(x,\ y)dy\right]dx.$$

(3) 因为 D 可表示为

$$D:\ 1\leqslant y\leqslant 2;\ \frac{1}{y}\leqslant x\leqslant y,$$

于是有
$$\iint\limits_D f(x,\ y)dx\,dy=\int_1^2\left[\int_{\frac{1}{y}}^y f(x,\ y)dx\right]dy.$$

例 5　试改变下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1\left[\int_1^x f(x,\ y)dy\right]dx$;

(2) $\int_0^1\left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx\right]dy$.

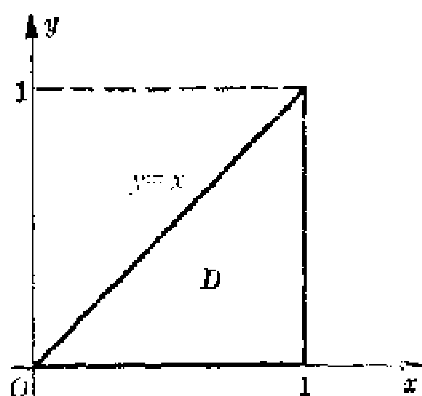
解 (1) 此时积分区域 D 为

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ 1\leqslant y\leqslant x,$$

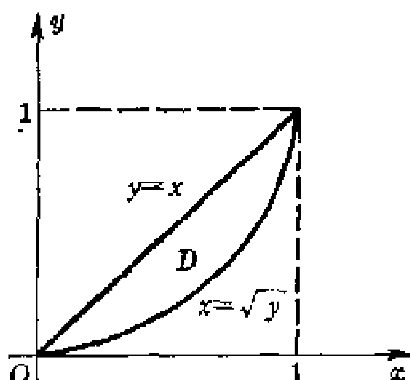
其图形见图 3.9(*a*)．把它表示为关于 y 的简单区域：

$$D:\ 0\leqslant y\leqslant 1;\ y\leqslant x\leqslant 1.$$

因此 $$\int_0^1\left[\int_1^x f(x, y)dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_y^1 f(x, y)dx\right]dy.$$



(*a*)



(*b*)

图 3.9

(2) 此时积分区域 D 为

$$D:\ 0\leqslant y\leqslant 1;\ y\leqslant x\leqslant \sqrt{y}$$

其图形见图 3.9(*b*)．把它表示为关于 x 的简单区域：

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ x^2\leqslant y\leqslant x.$$

于是有 $$\int_0^1\left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx\right]dy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^x f(x, y)dy\right]dx.$$

例 6 试求两个直径相同（均为 $2R$），且垂直相交的圆柱面所围成的立体的体积 V．

解 设这两个圆柱面的方程分别为 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$．图 3.10 所示的只是其中的第一卦限部分，根据对称性，这部分立体的体积是所求的体积之 1/8．这部分立体为一个顶为曲面的柱体，曲顶的曲面方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$，底部区域 D 可表示为

$$D:\ 0\leqslant x\leqslant R;\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{R^2-x^2}.$$

故这部分立体的体积为

$$\frac{1}{8}V=\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3.$$

因此

$$V=\frac{16}{3}R^3.$$

在上例的计算中，我们利用对称性缩小积分区域，以简化计算，这种方法在重积分计算中是经常使用的.

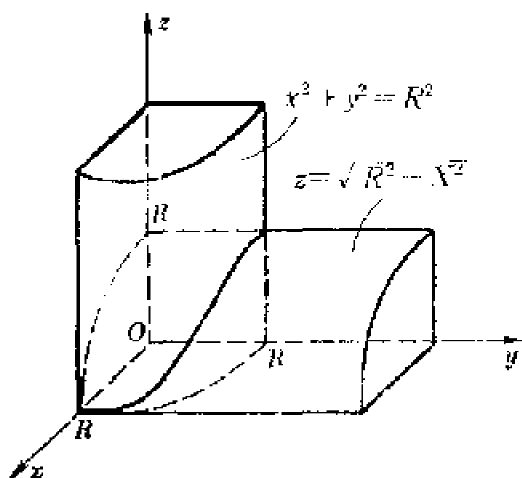


图　3.10

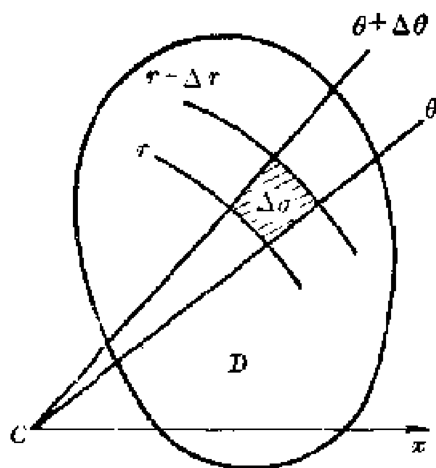


图　3.11

4. 用极坐标计算二重积分

在直角坐标系中，我们曾采用坐标曲线 $x=$常数和 $y=$常数组成的矩形网格把积分区域 D 分割成许多小区域(见图 3.2)，于是得到二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma$ 中的面积元素 $d\sigma$ 在直角坐标系内的形式：

$$d\sigma=dx\,dy.$$

根据二重积分的定义，二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma$ (即极限值(3.3))应与区域 D 的分割方式无关，在极坐标系中，我们当然也可采用极坐标系的坐标曲线 $r=$常数和 $\theta=$常数组成的扇形网格把积分区域 D 分成许多小的扇形区域，如图 3.11 所示．易知扇形小区

域$\Delta\sigma$的面积为

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=r\Delta r\Delta\theta+\frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta.$$

因为当$\Delta r\to 0$, $\Delta\theta\to 0$时，$\frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta$是比$r\Delta r\Delta\theta$更为高阶的无穷小量. 因而在极坐标系内面积元素的形式为

$$d\sigma=r\,dr\,d\theta. \tag{3.18}$$

设被积函数$f(x, y)$换成极坐标后可写成$F(r, \theta)$形式，即

$$F(r, \theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

下面我们考察当利用极坐标计算二重积分时的积分区域. 如果积分区域D是由图3.12给出的，则它显然可表达成下列形式:

$$D:\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta;$$
$$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta). \tag{3.19}$$

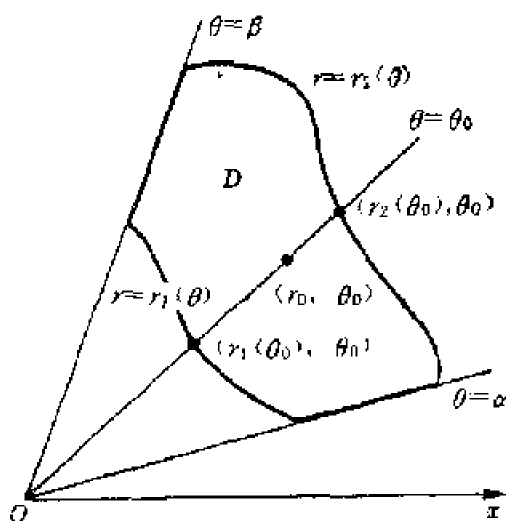


图 3.12

于是二重积分$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$就可以化成关于$\theta$、$r$的二次积分:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x, y)d\sigma&=\iint\limits_D F(r, \theta)r\,dr\,d\theta\\&=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}F(r, \theta)r\,dr\\&=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr.\end{aligned} \tag{3.20}$$

在把二重积分$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$化成关于积分变量$r$、$\theta$的二次积分时，还应注意将积分区域$D$写成(3.19)形式的方法.

(1) 当极点O在区域D内(见图3.13)时，D具有下列形式:

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta). \tag{3.21}$$

(2) 当极点O在区域D的边界上(见图3.14)时，D具有以

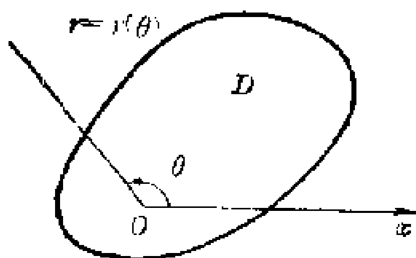


图 3.13

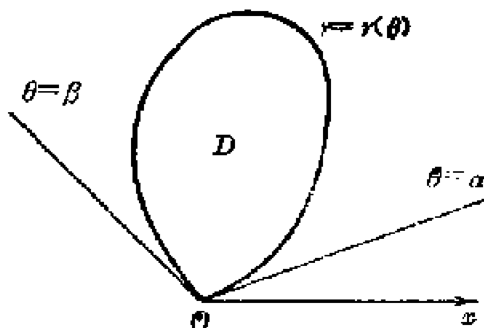


图 3.14

下形式:

$$D:\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta;\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta). \tag{3.22}$$

(3) 当极点 O 在区域 D 外(见图 3.15) 时, D 具有下列形式:

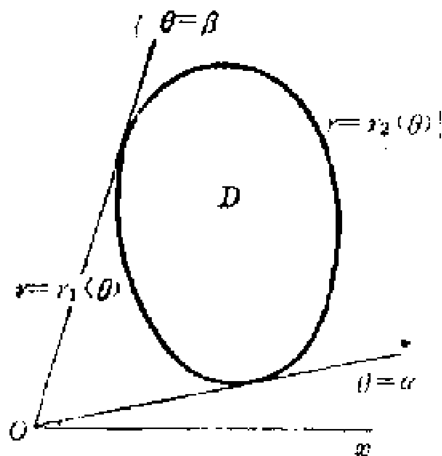


图 3.15

$$D:\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta;\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta). \tag{3.23}$$

例 7 (1) 圆形区域 $x^2+y^2\leqslant R^2$ (见图 3.16(a)) 可写成

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi;\ 0\leqslant r\leqslant R.$$

(2) 上半环形区域 $y\geqslant0,\ a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\ (0<a<b)$ (见图 3.16(b)) 可写成

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi;\ a\leqslant r\leqslant b.$$

(3) 圆形区域 $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2\ (a>0)$ (见图 3.16(c)) 可写成

$$D:\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant r\leqslant2a\cos\theta.$$

例 8 计算球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的体积 V.

解 上半球体为一个曲顶柱体, 曲顶的曲面方程为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

底区域 D 为一个圆形区域 $x^2+y^2\leqslant R^2$. 故

$$V=2\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma.$$

现利用极坐标将上述二重积分化成关于 r、θ 的二次积分, 便有

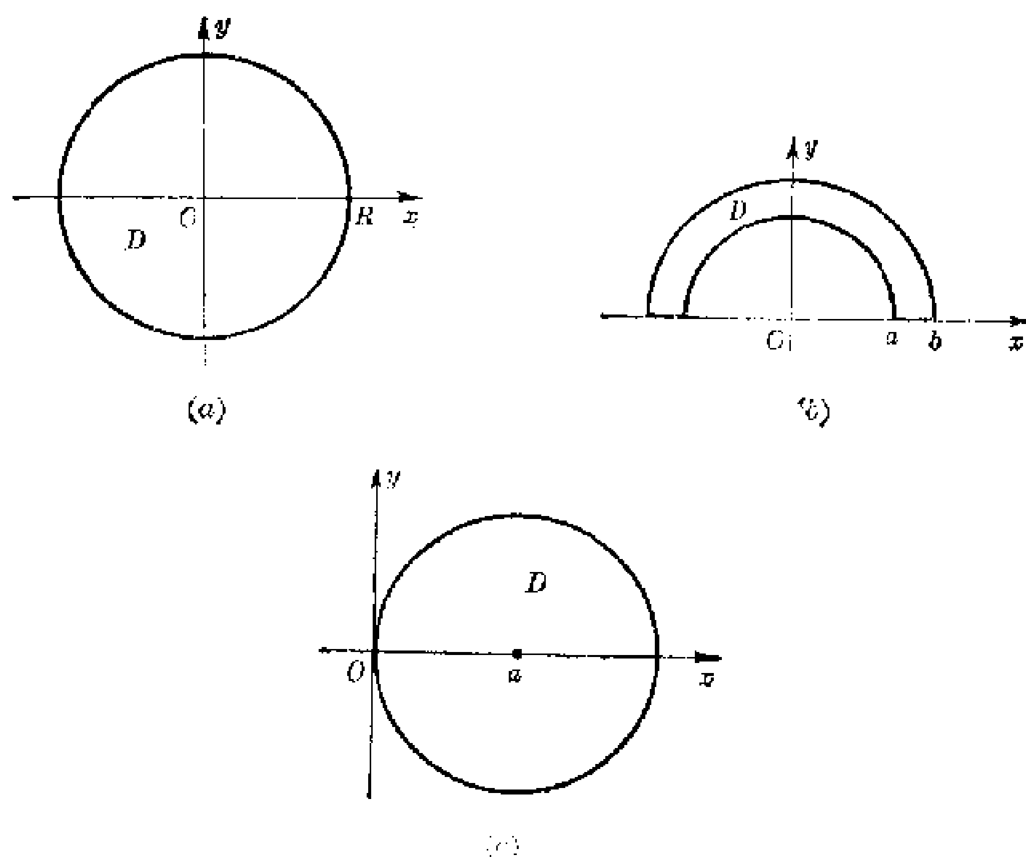


图 3.16

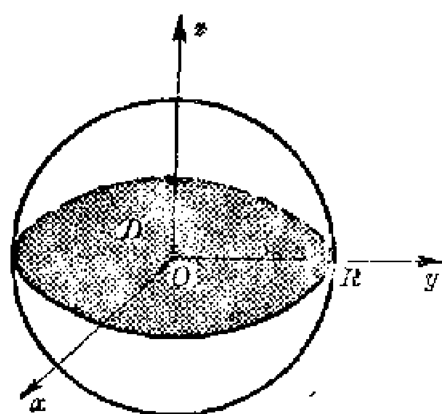


图 3.17

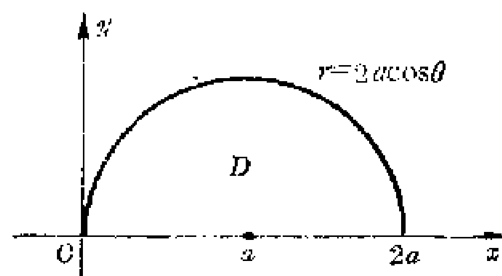


图 3.18

$$V=2\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R 2\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3\,d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 9 利用极坐标计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中积

分区域D为半圆$(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$, $y\geqslant 0$.

解 区域D可表示为

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\ 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta.$$

于是有

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,d\sigma&=\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8a^3}{3}(1-\sin^3\theta)d\theta\\&=\frac{8a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

5. 二重积分的变量替换

我们知道定积分的换元法则为

$$\int_a^b f(x)dx\overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

即在变换$x=\varphi(t)$下，被积函数$f(x)$变换成$f(\varphi(t))$, dx变换成$\varphi'(t)dt$, 关于变量x的积分上限b和下限a变换成关于变量t相应的上限β和下限α. 关于二重积分,其换元法则的形式为:

$$\iint_{D_{xy}}f(x,\ y)dxdy$$

$$\overset{\substack{x=x(u,\ v)\\y=y(u,\ v)}}{=\!=\!=\!=\!=}\iint_{D_{uv}}f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|dudv,\quad(3.24)$$

即在变换$x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$下，被积函数$f(x,\ y)$变换成$f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$，面积元素$dxdy$变换成$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|dudv$ $\left(\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|\right.$ 表示$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$的绝对值$\left.\right)$, 关于变量$x$、$y$的积分区域$D_{xy}$变换成关于变量$u$、$v$的相应积分区域$D_{uv}$. 证明这个公式的关键是应说明在上述变换下面积元素$dxdy$变换成

$\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv$. 下面推导这个结论.

如果函数 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 的各个偏导数都存在且连续, 而且函数行列式 $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 不等于零, 则根据隐函数存在定理, 便知方程组

$$\begin{cases} x-x(u, v)=0, \\ y-y(u, v)=0 \end{cases}$$

唯一确定了一组具有一阶连续偏导数的函数

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y). \end{cases}$$

类似于前面所作的 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 变换时的做法. 我们考察在 xOy 直角坐标面上, 由曲线族 $u(x, y)=$常数 和 $v(x, y)=$常数 组成的网格将区域 D_{xy} 分成许多小区域的情况(见图 3.19).

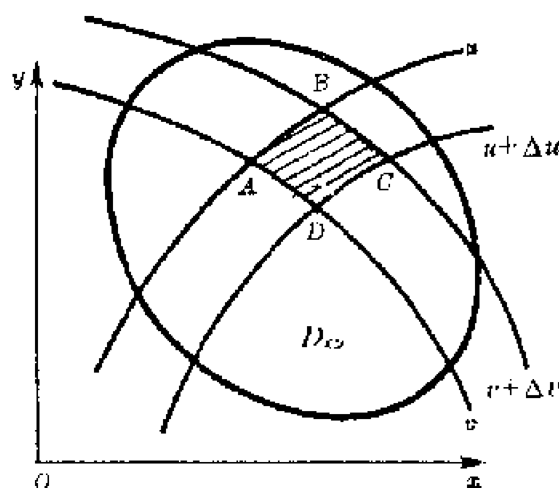


图 3.19

请注意, 在前面作

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

变换时, 我们是把它看作同一平面上点的坐标变换(同一点在直角坐标系中的坐标 (x, y) 与在极坐标系中坐标 (r, θ) 之间的变换). 现在作一般的变换 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 时, 我们仍是把它看作同一平面上点的坐标变换(坐标 (x, y) 与坐标 (u, v) 之间的变换), 因而 D_{xy}、D_{uv} 是相同的点集.

现在要计算图 3.19 中的曲边四边形 $ABCD$ 的面积 $d\sigma$. 显然 A, B, C, D 四点的坐标现在分别为

$$A(x(u, v), y(u, v)),\ B(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v)),$$

$$C(x(u+\Delta u, v+\Delta v), y(u+\Delta u, v+\Delta v)),$$

$$D(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v)).$$

于是，根据中值定理，便有

$$\overrightarrow{AB}=(x(u,\ v+\Delta v)-x(u,\ v))\boldsymbol{i}+(y(u,\ v+\Delta v)-y(u,\ v))\boldsymbol{j}$$

$$=\left[\frac{\partial x(u,\ v)}{\partial v}\Delta v+o(\Delta v)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial y(u,\ v)}{\partial v}\Delta v+o(\Delta v)\right]\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AD}=(x(u+\Delta u,\ v)-x(u,\ v))\boldsymbol{i}+(y(u+\Delta u,\ v)-y(u,\ v))\boldsymbol{j}$$

$$=\left[\frac{\partial x(u,\ v)}{\partial u}\Delta u+o(\Delta v)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial y(u,\ v)}{\partial u}\Delta u+o(\Delta u)\right]\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{DC}=(x(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-x(u+\Delta u,\ v))\boldsymbol{i}$$

$$+(y(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-y(u+\Delta u,\ v))\boldsymbol{j}$$

$$=\left[\frac{\partial x(u+\Delta u,\ v)}{\partial v}\Delta v+o(\Delta v)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial y(u+\Delta u,\ v)}{\partial v}\Delta v+o(\Delta v)\right]\boldsymbol{j},$$

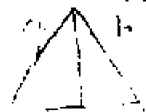
$$\overrightarrow{BC}=(x(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-x(u,\ v+\Delta v))\boldsymbol{i}$$

$$+(y(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-y(u,\ v+\Delta v))\boldsymbol{j}$$

$$=\left[\frac{\partial x(u,\ v+\Delta v)}{\partial u}\Delta u+o(\Delta u)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial y(u,\ v+\Delta v)}{\partial u}\Delta u+o(\Delta u)\right]\boldsymbol{j}.$$

由偏导数 $\frac{\partial x}{\partial u}$、$\frac{\partial x}{\partial v}$、$\frac{\partial y}{\partial u}$、$\frac{\partial y}{\partial v}$ 的连续性便知，当 $\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$ 时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 都将转化为向量



$$\boldsymbol{\tau}_u=\frac{\partial x(u,\ v)}{\partial v}dv\boldsymbol{i}+\frac{\partial y(u,\ v)}{\partial v}dv\boldsymbol{j},$$



而向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 都将转化为向量

$$\boldsymbol{\tau}_v=\frac{\partial x(u,\ v)}{\partial u}du\boldsymbol{i}+\frac{\partial y(u,\ v)}{\partial u}du\boldsymbol{j}.$$

于是当 $\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$ 时，曲边四边形 $ABCD$ 将转化为一个平行四边形，易知它的面积 $d\sigma=|\boldsymbol{\tau}_u\times\boldsymbol{\tau}_v|$. 注意到



$$\boldsymbol{\tau}_u\times\boldsymbol{\tau}_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}du & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}du & 0\\ \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y(u,v)}{\partial v}dv & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\,dv\,\boldsymbol{k}.$$

这样，便可得到用 $u(x,y)=$常数、$v(x,y)=$常数 曲线族将区域 D_{xy} 分割成小区域时的面积元素

$$d\sigma=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv. \tag{3.25}$$

例 10 试求在 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 变换下面积元素 $d\sigma$ 的形式.

解 因为

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

而 $r\geqslant 0$，所以在 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 变换下，面积元素为

$$d\sigma=r\,dr\,d\theta,$$

这个结果与式(3.18)是一致的.

例 11 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$，其中 D 为一个椭圆区域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\quad(a>0,\ b>0)$.

解 作变换 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1)$ 于是有

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=ab\,r.$$

注意到 D 可表示为

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;\ 0\leqslant r\leqslant 1,$$

根据换元法则(3.24)，便有

$$\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy \xlongequal[y=br\sin\theta]{x=ar\cos\theta} \iint\limits_{D'} a^2b^2r^3\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 a^2b^2r^3\sin\theta\cos\theta\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}a^2b^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}a^2b^2\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi}=0.$$

6* 二重积分的数值计算

下面将介绍二重积分数值计算的辛普森 (Simpson) 方法. 设已将二重积分 $R=\iint\limits_{D}f(x,\ y)dx\,dy$ 化成下列形式的二次积分:

$$R=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,\ y)dy.$$

令

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,\ y)dy, \tag{3.26}$$

则二重积分就可写成

$$R=\int_a^b S(x)dx. \tag{3.27}$$

对于一个固定的 x 值, 式 (3.26) 中的积分是关于积分变量 y 的一个定积分. 我们将采用辛普森方法计算积分(3.26)和(3.27).

先取定两个正整数 n_x 和 n_y. 将区间$[a,\ b]$等分成 $2n_x$ 个小区间, 其节点分别为

$$a,\ a+h_x,\ a+2h_x,\ \cdots,\ a+ih_x,\ \cdots,\ a+2n_xh_x=b,$$

其中

$$h_x=\frac{b-a}{2n_x}.$$

为了书写方便, 令

$$x_i=a+ih_x\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n_x).$$

再将每个区间$[y_1(x_i),\ y_2(x_i)]$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n_x)$ 都等分成 $2n_y$ 个小区间, 其节点坐标分别为

$$(x_i,\ y_1(x_i)),\ (x_i,\ y_1(x_i)+h_y(x_i)),\ \cdots,$$
$$(x_i,\ y_1(x_i)+jh_y(x_i)),\ \cdots,\ (x_i,\ y_1(x_i)+2n_yh_y(x_i)),$$

其中 $$h_y(x_i)=\frac{y_2(x_i)-y_1(x_i)}{2n_y}.$$

首先应用辛普森公式计算定积分 $S(x_i)$，即取

$$S(x_i)=\frac{h_y(x_i)}{3}[f(x_i,\ y_1(x_i))+f(x_i,\ y_2(x_i))$$
$$+2\sum_{j=1}^{n_y-1}f(x_i,\ y_1(x_i)+2jh_y(x_i))$$
$$+4\sum_{j=1}^{n_y}f(x_i,\ y_1(x_i)+(2j-1)h_y(x_i))]$$
$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n_x), \tag{3.28}$$

再利用辛普森公式计算定积分 (3.27)，获得二重积分 R 的近似值，即取

$$R_1=\frac{h_x}{3}\left[S(x_0)+S(x_{2n_x})+2\sum_{i=1}^{n_x-1}S(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{n_x}S(x_{2i-1})\right] \tag{3.29}$$

作为 R 的一个近似值.

然后，再把节点加密一倍，即取 $2n_x$ 和 $2n_y$ 作为新的 n_x 和 n_y. 再应用上述步骤得到 R 的另一个近似值 R_2. 如果在此基础上把节点再加密一倍，还可以得到近似值 R_3. 当相继的二次近似值的绝对误差或相对误差小于预先给定的允许误差限 ε 时，即当

$$|R_{n+1}-R_n|<\varepsilon,$$

或 $$\left|\frac{R_{n+1}-R_n}{R_{n+1}}\right|<\varepsilon$$

时，我们就取 $R=R_{n+1}$.

例 12 用数值方法计算二重积分 $R=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dx\,dy$，其中 D: $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$. 要求绝对误差不超过 0.1.

解 先把二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dx\,dy$ 化成二次积分

$$R=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}e^{x^2+y^2}dy.$$

先取 $n_x=1$, $n_y=1$. 因而

$$h_x=\frac{b-a}{2n_x}=0.5.$$

于是有
$$x_0=0,\ x_1=0.5,\ x_2=1.$$

先计算 $S(x_0)$. 由于 $y_1(x_0)=-1$, $y_2(x_0)=1$, 故

$$h_y(x_0)=\frac{y_2(x_0)-y_1(x_0)}{2n_y}=1.$$

由此得到相应的节点坐标分别为

$$(0,\ -1),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1).$$

所以根据式(3.28)得

$$S(x_0)=\frac{1}{3}[e^1+e^1+4e^0]=3.146.$$

再计算 $S(x_1)$. 由于 $y_1(x_1)=-0.866$, $y_2(x_1)=0.866$, 故

$$h_y(x_1)=\frac{y_2(x_1)-y_1(x_1)}{2n_y}=0.866.$$

由此得相应的节点坐标分别为

$$(0.5,\ -0.866),\ (0.5,\ 0),\ (0.5,\ 0.866).$$

由式(3.28)得

$$S(x_1)=\frac{0.866}{3}[e^1+e^1+4e^{0.25}]=3.052.$$

最后计算 $S(x_2)$. 由于 $y_1(x_2)=0$, $y_2(x_2)=0$, 故

$$S(x_2)=0.$$

这样由式(3.29)得

$$R_1=\frac{0.5}{3}[3.146+0+4\times3.052]=2.559.$$

然后把节点加密一倍, 即取 $n_x=2$, $n_y=2$. 因而

$$h_x=0.25.$$

于是相应的节点分别为

$$x_0=0,\ x_1=0.25,\ x_2=0.5,\ x_3=0.75,\ x_4=1.$$

对于 $x_0=0$, 有 $y_1(x_0)=-1$, $y_2(x_0)=1$, $h_y(x_0)=0.5$, 所以相应的节点坐标分别为

$$(0,\ -1),\ (0,\ -0.5),\ (0,\ 0),\ (0,\ 0.5),\ (0,\ 1).$$

由式(3.28)便得

$$S(x_0)=\frac{0.5}{3}[e^1+e^1+2e^0+4e^{0.25}+4e^{0.25}]=2.951.$$

同样可得

$$S(x_1)=2.958,$$
$$S(x_2)=2.944,$$
$$S(x_3)=2.713,$$
$$S(x_4)=0.$$

这样，代入式(3.29)又可得到 R 的一个近似值

$$R_2=\frac{0.25}{3}[2.951+0+2\times2.944+4\times2.958+4\times2.713]$$
$$=2.627.$$

由于

$$|R_2-R_1|<0.1,$$

因而所求的二重积分 R 的近似值就可取为 2.6，即

$$R=2.6.$$

实际上，应用极坐标计算可得

$$R=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 re^{r^2}dr=\frac{\pi}{2}[e-1]\approx2.699.$$

§2 三重积分

1. 三重积分的概念

设函数 $u=f(x, y, z)$ 在 R^3 空间中的有界闭区域 V 上有定义. 把区域 V 分成小区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$，我们也用 ΔV_i 表示小区域 ΔV_i 的体积 $(i=1, 2, \cdots, n)$. 若 (x_i, y_i, z_i) 为小区域 ΔV_i 中的任一点，d_i 为小区域 ΔV_i 的直径，即

$$d_i=\max\{|\overrightarrow{M_1M_2}|\,|\,M_1, M_2 \text{ 为 } \Delta V_i \text{ 中任意两点}\}.$$

那末，函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 上的三重积分 $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv$ 的定义为

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \tag{3.30}$$

其中 $d=\max\{d_i|1\leqslant i\leqslant n\}$. 对于这个和式极限的理解完全类似

于定义二重积分的和式极限(3.3). $f(x, y, z)$ 称为被积函数, V 称为积分区域, dv 称为体积元素.

如果我们采用分别平行于 xOy 坐标面, yOz 坐标面, zOx 坐标面的三组平面族组成的长方体网格分割区域 V, 就可得到与式(3.4)类似的结果, 即体积元素为

$$dv = dx\,dy\,dz. \tag{3.31}$$

如果积分区域 V 可被表示成下列形式:

$$V:\ a \leqslant x \leqslant b;\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x);\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$$

(参看图 3.20), 则三重积分同样可化成三次积分来计算:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3.32}$$

设积分区域 V 在 xOy 坐标面上的投影为平面区域 D(见图 3.20), 则三重积分 $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv$ 也可以写成下列形式:

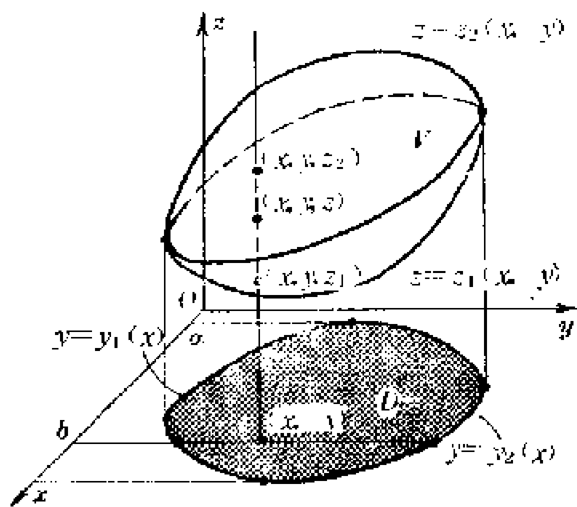


图 3.20

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \iint\limits_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] d\sigma. \tag{3.33}$$

例 1 试计算由平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $y=4z$ 和曲面 $x^2+y^2=6-z$ 所围成之立体的体积(见图 3.21).

解 因为这部分区域 V 可以表示成下列形式:

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2;$$

$$\frac{1}{4}y \leqslant z \leqslant 6 - x^2 - y^2.$$

如果我们也用 V 表示这个区域的体积, 则由式(3.32)便得

$$V=\iiint_V dv$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dz$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^2\left[6-x^2-y^2-\frac{1}{4}y\right]dy$$
$$=\int_0^1\left(\frac{53}{6}-2x^2\right)dx$$
$$=\frac{49}{6}.$$

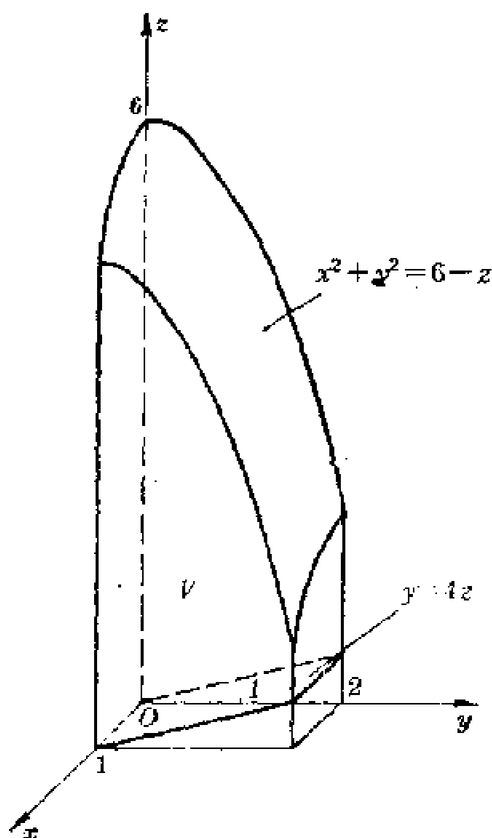


图 3.21

例 2 试求三重积分 $\iiint_V(x+y+z)dv$，其中 V 为由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的区域(见图 3.22).

解 显然积分区域 V 可被表示成下面形式:

$$0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1-x;\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y.$$

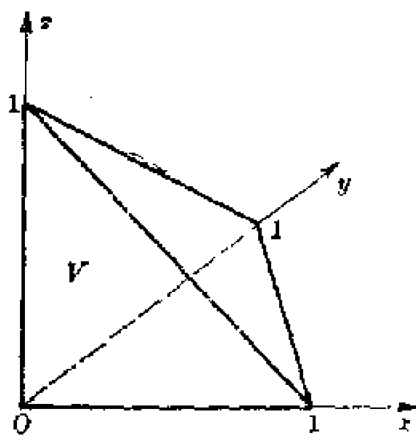


图 3.22

于是有

$$\iiint_V x\,dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x(1-x-y)dy$$
$$=\int_0^1\frac{1}{2}x(1-x)^2dx$$
$$=\frac{1}{24}.$$

又根据对称性可知

$$\iiint_V(x+y+z)dv=3\iiint_V xdv=\frac{1}{8}.$$

本例中对于被积函数与积分区域的对称性的应用必须予以注意．利用这种对称性常常可以简化重积分的计算．

2. 柱坐标与球坐标

空间任一点 M 在直角坐标系中对应于一个数组 (x, y, z)（即点 M 在直角坐标系中的坐标）；同时点 M 也可以如图 3.23(a) 所示的那样与数组 (r, θ, z) 相对应，其中

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

此数组 (r, θ, z) 就称为点 M 的柱坐标．从图 3.23(a) 还容易看出点 M 的直角坐标 (x, y, z) 与它的柱坐标 (r, θ, z) 之间的关系如下：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{3.34}$$

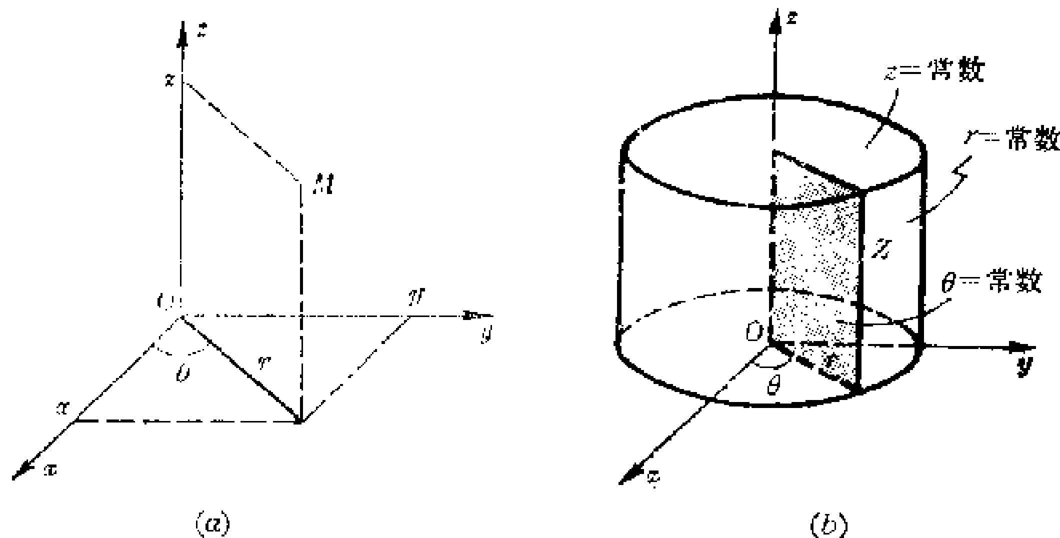


图 3.23

上述方程组的函数行列式为

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r. \tag{3.35}$$

柱坐标系的三族坐标曲面易知为(参看 3.23(b))

(1) $r=$ 常数,一族圆柱面;

(2) $\theta=$ 常数,一族半平面;

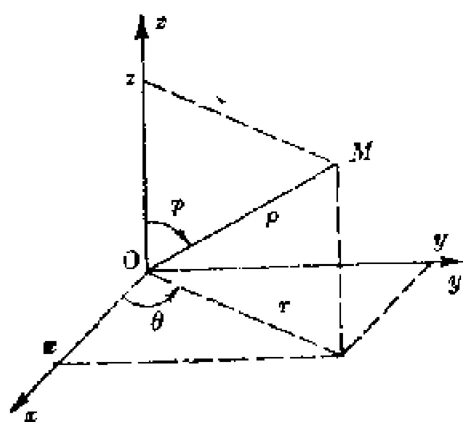
(3) $z=$ 常数,一族平面.

如图 3.24(a)所示那样,空间任一点 M 还可以与数组(ρ, φ, θ)相对应,其中

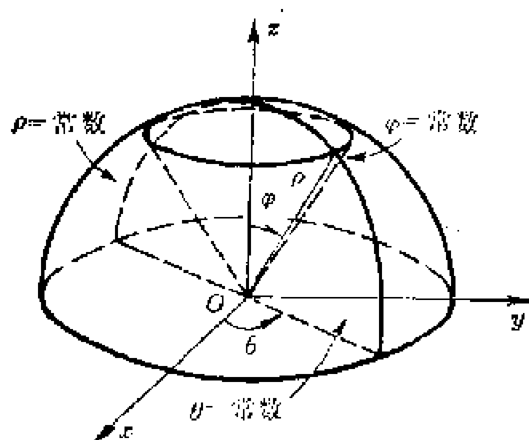
$$0\leqslant\rho<+\infty,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

此数组(ρ, φ, θ)称为点 M 的球坐标. 从图 3.24(a) 中还容易看出,点 M 的直角坐标(x, y, z)与它的球坐标(ρ, φ, θ)之间的关系如下:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases} \tag{3.36}$$



(a)



(b)

图 3.24

上述方程组的函数行列式为

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=\rho^2\sin\varphi. \tag{3.37}
$$

易知球坐标系的三族坐标曲面为(参看图 3.24(b))

(1) $\rho=$常数,一族球面;

(2) $\varphi=$常数,一族半圆锥面;

(3) $\theta=$常数,一族半平面.

3. 三重积分的变量替换

类似于二重积分的换元法则,我们有关于三重积分的换元法则如下:

$$
\iiint\limits_{V_{xyz}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \xlongequal[\substack{z=z(u,v,w)}]{\substack{x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)}} \iiint\limits_{V_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))
$$

$$
\times \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw. \tag{3.38}
$$

方程组(满足隐函数存在定理的条件)

$$
\begin{cases} x-x(u, v, w)=0, \\ y-y(u, v, w)=0, \\ z-z(u, v, w)=0 \end{cases}
$$

确定了一组函数

$$
\begin{cases} u=u(x, y, z), \\ v=v(x, y, z), \\ w=w(x, y, z). \end{cases}
$$

应用三族曲面族

$$
\begin{cases} u(x, y, z)=常数, \\ v(x, y, z)=常数, \\ w(x, y, z)=常数, \end{cases}
$$

把积分区域 V 分割成小区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$, 这时体积元素 dv 的形式为

$$dv=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw. \tag{3.39}$$

特别对于式(3.34)和(3.36)所给定的变换，相应的体积元素分别为

$$dv=r\,dr\,d\theta\,dz \tag{3.40}$$

和

$$dv=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta. \tag{3.41}$$

于是运用柱坐标计算三重积分时，有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iiint\limits_V f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)r\,dr\,d\theta\,dz,$$

而运用球坐标计算三重积分时，有

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ =&\iiint\limits_V f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.\end{aligned}$$

例 3 试求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ 的体积.

解 设此椭球区域为 V, 则应用三重积分计算体积，有

$$V=\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

为了计算这个三重积分，作如下的变换：

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=c\rho\cos\varphi.\end{cases}$$

计算它的函数行列式，得

$$\begin{aligned}\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}&=\begin{vmatrix}a\sin\varphi\cos\theta & a\rho\cos\varphi\cos\theta & -a\rho\sin\varphi\sin\theta\\ b\sin\varphi\sin\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta\\ c\cos\varphi & -c\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}\\ &=abc\rho^2\sin\varphi.\end{aligned}$$

在此变换下，椭球区域 V 可表示为下列形式：

$$0\leqslant\rho\leqslant 1;\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是，在此变量替换下，有

$$\begin{aligned}V&=\iiint_V abc\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 abc\rho^2\sin\varphi\,d\rho\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{1}{3}abc\sin\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}abc\,d\theta=\frac{4}{3}\pi abc.\end{aligned}$$

例 4 试计算三重积分 $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$，其中积分区域 V 为上半单位球体，即：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ z\geqslant 0$.

解 我们可以采用球坐标计算此三重积分．这时积分区域 V 可表示为下列形式：

$$0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,dx\,dy\,dz&=\iiint_V \rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\,d\theta=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

例 5 求三重积分 $\iiint_V (x^2+y^2+z)\,dv$，其中 V 为由平面 $z=0$、旋转抛物面 $z=x^2+y^2$、圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所围成的部分（见图 3.25）．

解 采用柱坐标计算：

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V (x^2+y^2+z)\,dv \\
&=\iiint_V (r^2+z)\,r\,dr\,d\theta\,dz \\
&=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{r^2}(r^2+z)\,dz \\
&=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \frac{3}{2}r^5\,dr \\
&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

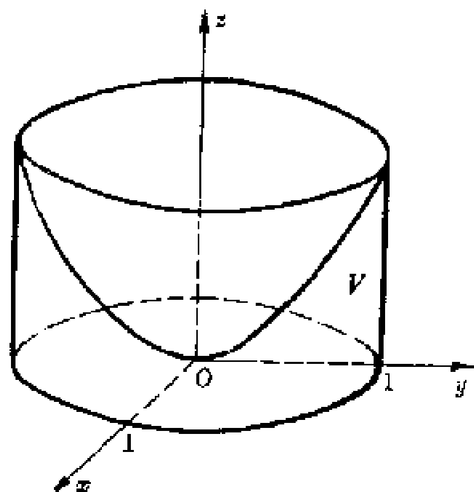


图 3.25

§3 第一类曲面积分和第一类曲线积分

1. 曲面面积

在一元微积分中曾利用定积分计算曲线的弧长. 现在我们讨论如何应用二重积分计算曲面的面积.

设曲面方程为 $z=f(x, y)$, S 为曲面的一部分, S 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上具有连续的一阶偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$. 现要求曲面 S 的面积 A. 为此, 在 xOy 坐标面上用两族坐标曲线:

$$x=\text{常数},\ y=\text{常数}$$

所组成的矩形网格把区域 D 分割成许多小区域 $\Delta\sigma$, 它的面积也用 $\Delta\sigma$ 表示, 见图 3.26. 从图中易知:

$$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y,$$

以小区域 $\Delta\sigma$ 为底, 母线平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的柱体 K 与曲面 S 的交为 ΔS. 在 ΔS 上任取一点 $M(x, y, z)$. 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 M 处的切平面与柱体 K 的交为 $\Delta\bar{S}$(见图 3.27), 它的面积也用 $\Delta\bar{S}$ 表示. 因为小区域 $\Delta\sigma$ 恰为 $\Delta\bar{S}$ 在 xOy 坐标面上的投影区域, 因而它们面积之间有如下的关系:

$$\Delta\sigma=|\Delta\bar{S}\cos\gamma|=\Delta\bar{S}\,|\cos\gamma| \tag{3.42}$$

其中 γ 为曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $M(x, y)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标向

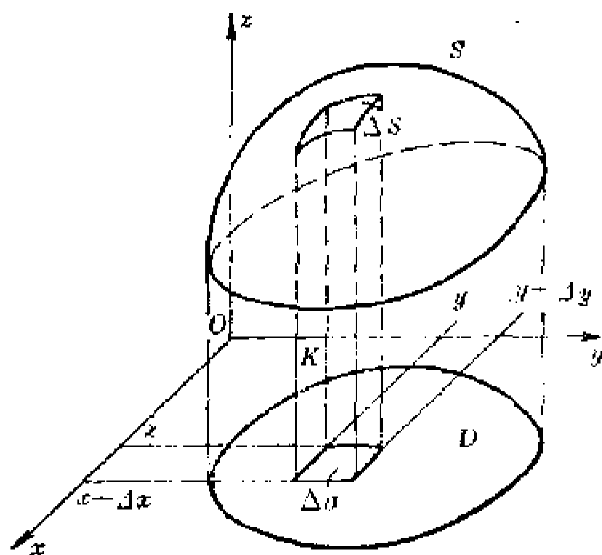


图 3.26

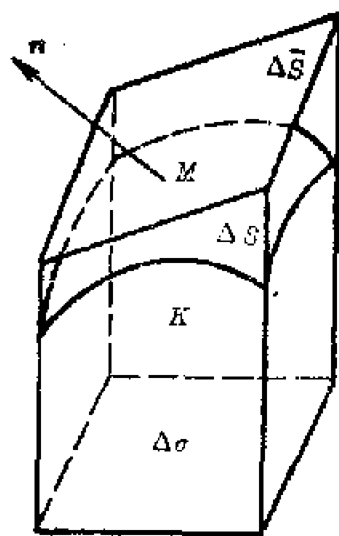


图 3.27

量$\boldsymbol{k}$的夹角. 由式(2.19)得

$$\boldsymbol{n}=-f_x(x,y)\boldsymbol{i}-f_y(x,y)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

所以

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \tag{3.43}$$

于是从式(3.42)便得

$$\Delta S=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta\sigma. \tag{3.44}$$

类似于曲线弧长的计算，曲面S的面积A可以表示为和式的极限

$$A=\lim_{d\to 0}\sum\Delta\bar{S}=\lim_{d\to 0}\sum\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta\sigma, \tag{3.45}$$

其中d为小区域$\Delta\sigma$的直径. 比较式(3.45)和(3.3)，便知曲面S的面积可以写成一个二重积分

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy. \tag{3.46}$$

例 1 试求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被圆柱体$x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$所截的这部分曲面的面积A.

解 因为这部分曲面是上下对称的，所以只需先求出其上半部分面积，然后乘2就得到全部面积. 图3.28(a)只画出了上半部分的一半.

在xOy坐标面上，区域$x^2+y^2\leqslant ax$(图3.26(b)为此区域之上

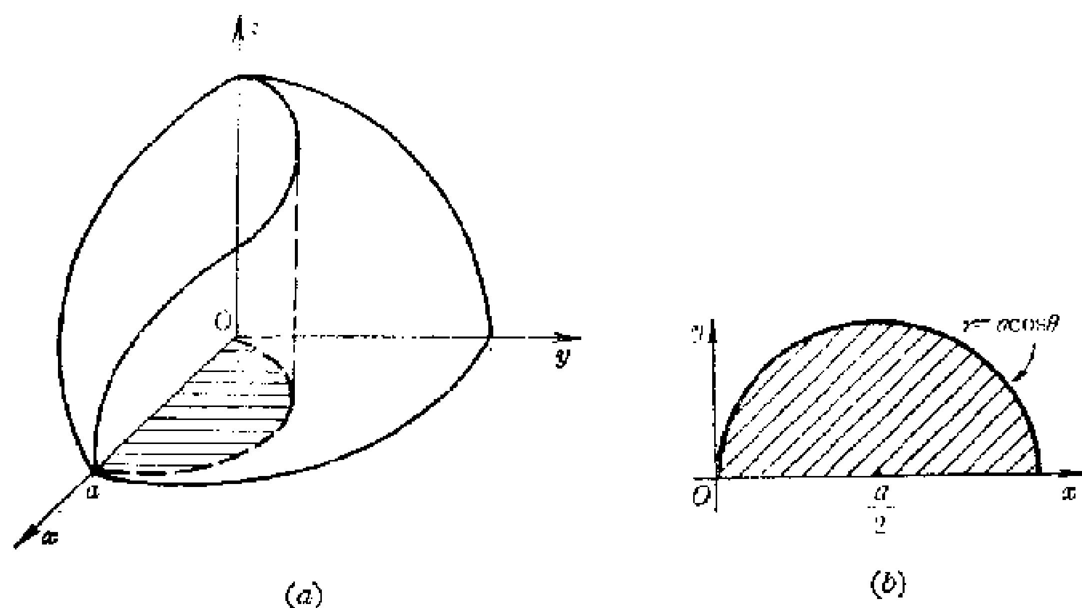


图 3.28

半部分)又可以应用极坐标表示成:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\quad 0\leqslant r\leqslant a\cos\theta.$$

上半部分球面的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

因此
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

于是所求曲面的面积为

$$\begin{aligned}A&=2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\\&=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy\\&=2\iint_D\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

进一步利用对称性，有

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\\&=4\int_0^{\pi/2}(a^2-a^2\sin^2\theta)\,d\theta=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\end{aligned}$$

例 2 设 S 为一个球心在 $(0, 0, a)$ $(a>0)$ 处的球面，如图 3.29 所示．试问欲使球面 S 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 相交部分的曲面面积 A 达到极大，球面 S 的半径 R 应取多大．

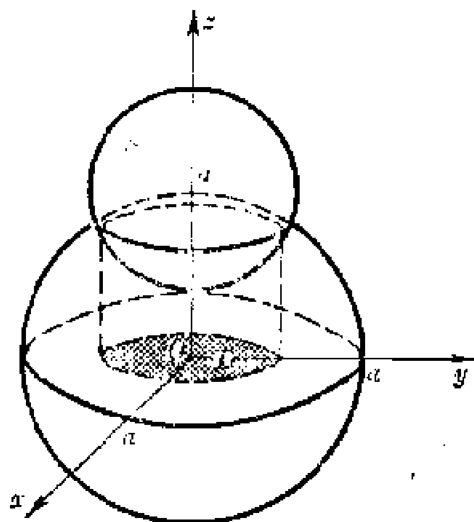


图 3.29

解 从图 3.29 易知，球面 S 与球体相交部分一定为 S 的下半球面．因此它的曲面方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

显然，当 $R\geqslant 2a$ 时 $A=0$，故现只考虑 $0<R<2a$ 的情况．考虑

$$\begin{cases} z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2. \end{cases}$$

将 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 代入不等式 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$，便可得到这部分曲面在 xOy 坐标面上的投影区域 D 的表达式：

$$D:\ x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),$$

它是一个圆形区域．故

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

应用极坐标计算上述二重积分，有

$$A=\iint_D\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[R^2-\frac{R^3}{2a}\right]d\theta=2\pi R^2-\frac{\pi}{a}R^3.$$

现在的问题是要求函数 $A=2\pi R^2-\frac{\pi}{a}R^3$ 的极大值点. 易知

$$\frac{dA}{dR}=4\pi R-\frac{3\pi}{a}R^2,\ \frac{d^2A}{dR^2}=4\pi-\frac{6\pi}{a}R.$$

由方程 $\frac{dA}{dR}=0$ 可以得到两个解:

$$R=0 \quad 和 \quad R=\frac{4}{3}a.$$

显然 $R=0$ 使 A 达到极小; 而在 $R=\frac{4}{3}a$ 处的二阶导数

$$\left.\frac{d^2A}{dR^2}\right|_{R=\frac{4}{3}a}=-4\pi<0,$$

故当 $R=\frac{4}{3}a$ 时 A 达到极大, 极大值为 $\frac{32}{27}\pi a^3$.

如果有界曲面 S 由下列参数方程给出:

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v), \end{cases}$$

其中 $(u,\ v)$ 的取值范围为区域 D. 设此区域内 $x(u,\ v)$、$y(u,\ v)$、$z(u,\ v)$ 的各种一阶偏导数都存在且连续. 如果在区域 D 上函数行列式 $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ 不等于零, 则由方程组

$$\begin{cases} x-x(u,\ v)=0, \\ y-y(u,\ v)=0, \end{cases}$$

可以确定一组函数

$$\begin{cases} u=u(x,\ y), \\ v=v(x,\ y). \end{cases}$$

把这组函数代入 $z=z(u,\ v)$ 内, 便得

$$z=z(u(x,\ y),\ v(x,\ y)).$$

这样 z 就为 (x, y) 的函数. 由式(2.41)可得曲面 S 上点 $M(x, y, z)$ 处的法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{i}+\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{j}+\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\boldsymbol{k}.$$

故法向量的模的平方为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{n}|^2 &= \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2, \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{cases}
E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\
G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\
F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}.
\end{cases} \qquad (3.48)
$$

于是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$
\cos\gamma = \frac{\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}}.
$$

这样，式(3.44)便可改写成

$$
\Delta S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\Delta\sigma = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|}\Delta\sigma.
$$

故曲面 S 的面积 A 可写成下列形式的二重积分

$$
A = \iint\limits_{D'} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|} dx\,dy.
$$

又在变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 下，面积元素 $dx\,dy$ 变换成 $\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv$. 所以经过上述变换后，得

$$
A = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \qquad (3.49)
$$

这个公式虽然是在 $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 在 D 上不等于零的条件下推导而得的，但在给定的参数方程中，变量 x、y、z 的地位是相同的，不

一定要把 x、y 作为自变量，把 z 看作它们的函数．实际上，只要在区域 D 上 $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$、$\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}$、$\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}$ 中有一个取值不等于零，我们就可得到式(3.49)．

例 3 试求半径为 R 的球面的面积 A.

解 半径为 R 的球面的参数方程可写成

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi, \end{cases}$$

其中参数 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 它们的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=R\cos\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-R\sin\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=R\cos\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=R\sin\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-R\sin\varphi,\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$$

由此可以算得

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi.$$

故

$$A=\iint\limits_D R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0 R^2\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}2R^2\,d\theta=4\pi R^2.$$

2. 第一类曲面积分

设空间有一物体，它所占有的空间区域为 V. 已知物体在 V 中的点 $M(x',\ y',\ z')$ 处的质量密度为 $\mu_3(x',\ y',\ z')$. ΔV 为 V 中的一块小区域，它所相应的物体部分的质量为 Δm. 再在 ΔV 中任取一点 $(x,\ y,\ z)$. 如果我们把 ΔV 中每点处的质量密度都看成是相同的，则有

$$\Delta m=\mu_3(x,\ y,\ z)\Delta V,$$

其中 ΔV 表示小区域 ΔV 的体积. 所以当 $\mu_3(x,\ y,\ z)$ 为区域 V 上的一个连续函数时，物体的质量微元就为

$$dm = \mu_3(x,\ y,\ z)\,dv.$$

于是此物体的质量

$$m = \iiint_V dm = \iiint_V \mu_3(x,\ y,\ z)\,dv. \qquad (3.50)$$

设平面薄板在 xOy 坐标面上占有平面区域 D. 已知物体在 D 中点 $M(x,\ y)$ 处的面密度为 $\mu_2(x,\ y)$. 当 $\mu_2(x,\ y)$ 为 D 上的连续函数时，平面薄板的质量微元就为

$$dm = \mu_2(x,\ y)\,d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 为面积微元或面积元素. 于是薄板的质量为

$$m = \iint_D \mu_2(x,\ y)\,dx\,dy. \qquad (3.51)$$

现考察空间中几何形状为曲面 S 的曲面薄板的质量. 已知物体在曲面 S 的点 $M(x',\ y',\ z')$ 处的面密度为 $\mu_2(x',\ y',\ z')$. 设 ΔS 为曲面 S 上的一块小曲面，$(x,\ y,\ z)$ 为 ΔS 上的任一点. 如果把 ΔS 的每点处的面密度都看作是相同的，则由 ΔS 相应的小块曲面薄板的质量就为

$$\Delta m = \mu_2(x,\ y,\ z)\,\Delta S,$$

其中 ΔS 表示小曲面 ΔS 的面积. 将整个薄板 S 分割成 n 个小块 $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \cdots,\ \Delta S_n$, 并在每一小块 ΔS_i 上任取一点 $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, 则此曲面薄面的质量为

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu_2(x_i, y_i,\ z_i)\,\Delta S_i,$$

其中 d 为 $\max\{d_i \mid d_i$ 为 ΔS_i 的直径$\}$. 如果我们把上述极限记为 $\iint_S \mu_2(x, y,\ z)\,dS$, 就有

$$m = \iint_S \mu_2(x,\ y,\ z)\,dS. \qquad (3.52)$$

一般地，对于一个在曲面 S 上有定义的函数 $\varphi(x,\ y,\ z)$, 如果极限 $\lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$ 存在，就记它为 $\iint_S \varphi(x,\ y,\ z)\,dS$, 即

$$\iint_S \varphi(x, y, z)\,dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i, \qquad (3.53)$$

并称此极限为函数 $\varphi(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第一类曲面积分.

如果曲面 S 为函数 $z=f(x, y)$ 在 xOy 坐标面上有界闭区域 D 上的图形，而且 $f(x, y)$ 各种一阶偏导数都存在且连续，则由式(3.46)便得曲面微元

$$dS=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy. \qquad (3.54)$$

于是，曲面积分 $\iint_S \varphi(x, y, z)\,dS$ 就可化成下列二重积分：

$$\iint_S \varphi(x, y, z)\,dS=\iint_D \varphi(x, y, f(x, y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy. \qquad (3.55)$$

如果曲面 S 由参数方程 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，$z=z(u, v)$ 给出，其中 (u, v) 的取值范围为区域 D，而且 $x(u, v)$，$y(u, v)$，$z(u, v)$ 的各种一阶偏导数都存在且连续，函数行列式 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$，$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$，$\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ 中至少有一个在 D 上不等于零，那末由式(3.49)，有曲面微元

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \qquad (3.56)$$

故

$$\iint_S \varphi(x, y, z)\,dS = \iint_D \varphi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \qquad (3.57)$$

例 4 试求曲面积分 $\iint_S (x^2+y^2+z)\,dS$，其中曲面 S 为旋转抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 上 $z\geqslant 0$ 的部分.

解 因为函数 $z=4-x^2-y^2$ 的一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,$$

所以由式(3.54)得

$$dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

于是，由式(3.55)得

$$\begin{aligned}&\iint_S (x^2+y^2+z)\,dS\\ &=\iint_D (x^2+y^2+4-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy\\ &=\iint_D 4\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

其中 D 为曲面 S 在 xOy 坐标面上的投影区域，易知它是一个圆形区域

$$D:\ x^2+y^2\leqslant 4.$$

应用极坐标可把它写成

$$D:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2.$$

故应用极坐标计算上面的二重积分，得

$$\begin{aligned}&\iint_S (x^2+y^2+z)\,dS=\iint_D 4\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy\\ &=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 4r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}(1+4r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=2}d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(17\sqrt{17}-1)\,d\theta=\frac{2\pi}{3}(17\sqrt{17}-1).\end{aligned}$$

例 5　计算曲面积分 $\iint_S z\,dS$，其中曲面 S 由参数方程

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$$

给出，其中 $(u,\ v)$ 的取值范围是

$$D:\ 0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi.$$

解　由式(3.48)，得

$$\begin{cases}E=\cos^2 v+\sin^2 v+0=1,\\ G=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=u^2+1,\\ F=-u\sin v\cos v+u\sin v\cos v+0=0.\end{cases}$$

于是，由式(3.56)有

$$dS=\sqrt{1+u^2}\,du\,dv.$$

故

$$\begin{aligned}\iint_S z\,dS&=\iint_G v\sqrt{1+u^2}\,du\,dv\\&=\int_0^{2\pi}v\,dv\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du\\&=\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v=0}^{v=2\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right)\right]_{u=0}^{u=a}\\&=\pi^2a\sqrt{1+a^2}+\pi^2\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right).\end{aligned}$$

3. 第一类曲线积分

在讨论了第一类曲面积分后，我们顺便讨论第一类曲线积分。因为两者具有许多类似之处，虽然后者最后是归结成为一个定积分来计算。

现考察空间中几何形状为曲线段 l 的物体的质量。已知物体在其几何曲线 l 的点 $M(x', y', z')$ 处的线密度为 $\mu_1(x', y', z')$。设 Δl 为曲线 l 上的一小段曲线，它的长度也用 Δl 表示。在 Δl 上任取一点 (x, y, z)。如果我们把 Δl 上每一点处的线密度都看作是相等的，则小曲线段 Δl 相应的物体部分的质量为

$$\Delta m=\mu_1(x, y, z)\Delta l.$$

将整个曲线段 l 分成 n 个小段 $\Delta l_1, \Delta l_2, \cdots, \Delta l_n$，在每小段 Δl_i 上任取一点 (x_i, y_i, z_i)，则整个物体的质量为

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu_1(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i.$$

其中 $d=\max\{d_i|d_i$ 为 Δl_i 的长度$\}$。如果我们把上述极限记为 $\int_l\mu_1(x, y, z)dl$，就有

$$m=\int_l\mu_1(x, y, z)dl.$$

对于一个在曲线段 l 上有定义的函数 $F(x, y, z)$，如果极限 $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}F(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$ 存在，就记它为 $\int_l F(x, y, z)dl$，即

$$\int_l F(x, y, z)dl=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i,\qquad(3.58)$$

并称此极限为函数 $F(x, y, z)$ 在曲线 l 上的第一类曲线积分。

当 l 为 xOy 平面上的一条平面曲线时，它的弧长微分

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

类似地，当 l 为一条空间曲线时，它的弧长微分

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}. \tag{3.59}$$

如果空间曲线段 l 由下列参数方程给出：

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \\ z=z(t), \end{cases}$$

那末，易知此时弧长微分

$$dl=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{3.60}$$

于是曲线积分(3.58)便可化成下列定积分：

$$\int_l F(x, y, z)\,dl$$
$$=\int_\alpha^\beta F[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{3.61}$$

例 6　试求曲线积分 $\int_l z\,dl$，其中曲线 l 的参数方程为

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=t \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

解　因为

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \frac{dy}{dt}=a\cos t,\ \frac{dz}{dt}=1,$$

故由式(3.60)便得

$$dl=\sqrt{a^2+1}\,dt,$$

于是，
$$\int_l z\,dl=\int_0^{2\pi} t\sqrt{a^2+1}\,dt=2\pi^2\sqrt{a^2+1}.$$

例 7　计算曲线积分 $\int_l y\,dl$，其中 l 是 xOy 坐标面上的平面曲

线 $y^2=2x$ 上自原点到点(2, 2)的一段.

解 曲线段 l 相应的参数方程可写成

$$x=\frac{1}{2}t,\ y=\sqrt{t},\ z=0 \quad (0\leqslant t\leqslant 4).$$

故曲线积分 $\int_l y\,dl$ 就化成下列定积分:

$$\int_l y\,dl=\int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$$

$$=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

§4 重心与转动惯量

1. 重心

设在空间点 $M(x, y, z)$ 处有一质量为 m 的质点, 则此质点关于坐标面 yOz、zOx、xOy 的静力矩分别为 mx、my、mz. 一般地, 设空间的一个质点组, 在点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ 处的质点的质量为 m_i ($i=1, 2, \cdots, n$), 则此质点组关于坐标面 yOz、zOx、xOy 的静力矩分别就是

$$\sum_{i=1}^n m_ix_i,\ \sum_{i=1}^n m_iy_i,\ \sum_{i=1}^n m_iz_i.$$

此质点组的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 就是这样一点, 即设想在该点处有一质点, 其质量是原质点组的质量总和$\left(即 \sum\limits_{i=1}^n m_i\right)$, 而它关于坐标面 yOz、zOx、xOy 的静力矩与原来的质点组等效, 即

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^n m_i\right)\bar{x}=\sum\limits_{i=1}^n m_ix_i,\\ \left(\sum\limits_{i=1}^n m_i\right)\bar{y}=\sum\limits_{i=1}^n m_iy_i,\\ \left(\sum\limits_{i=1}^n m_i\right)\bar{z}=\sum\limits_{i=1}^n m_iz_i.\end{cases}$$

由此可得此质点组重心 G 的三个坐标:

$$\left\{\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\\ \bar{y}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\\ \bar{z}&=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.\end{aligned}\right. \tag{3.62}$$

现考察占有空间区域 V 的物体，它的体密度为 $\mu_3(x, y, z)$。物体的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$就是这样一点，即设想此物体的全部质量都集中在 G 点而成一质点后，它关于坐标面 yOz, zOx, xOy 的静力矩与原物体等效，即

$$\left\{\begin{aligned}&\bar{x}\iiint\limits_V \mu_3(x, y, z)dv\\ &\quad=\iiint\limits_V x\mu_3(x, y, z)dv,\\ &\bar{y}\iiint\limits_V \mu_3(x, y, z)dv\\ &\quad=\iiint\limits_V y\mu_3(x, y, z)dv,\\ &\bar{z}\iiint\limits_V \mu_3(x, y, z)dv\\ &\quad=\iiint\limits_V z\mu_3(x, y, z)\,dv,\end{aligned}\right.$$

其中 $\mu_3(x, y, z)dv$ 即为此物体的质量微元．因而三重积分 $\iiint\limits_V \mu_3(x, y, z)dv$ 为此物体的质量；$x\mu_3(x, y, z)dv$、$y\mu_3(x, y, z)dv$、$z\mu_3(x, y, z)dv$ 分别为质量微元关于坐标面 yOz, zOx, xOy 的静力矩．由上面的方程组便得物体重心 G 的三个坐标：

$$
\begin{cases}
\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_V x\mu_3(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \mu_3(x,y,z)dv},\\[2ex]
\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_V y\mu_3(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \mu_3(x,y,z)dv},\\[2ex]
\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_V z\mu_3(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \mu_3(x,y,z)dv}.
\end{cases}
\tag{3.63}
$$

例 1 球顶锥体 V 由图 3.30 给出．利用球坐标可将它表示为

$$0\leqslant\rho\leqslant a;\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha;\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

锥体的质量分布是均匀的，它的体密度 $\mu_3(x,y,z)=k$．试求此锥体的重心 $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$．

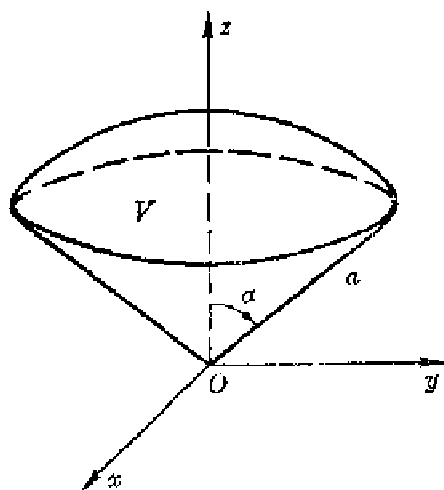


图 3.30

解 由此锥体的对称性便知

$$\bar{x}=\bar{y}=0.$$

此锥体的质量为

$$\iiint\limits_V kdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{a}k\rho^2\sin\varphi\,d\rho=\frac{2\pi}{3}ka^3(1-\cos\alpha).$$

又

$$\iiint\limits_V zk\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{a}k\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}ka^4\sin^2\alpha.$$

于是由式(3.63)，得

$$\bar{z}=\frac{\frac{\pi}{4}ka^4\sin^2\alpha}{\frac{2\pi}{3}ka^3(1-\cos\alpha)}=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha).$$

如果物体是一块曲面薄板，其几何形状为曲面 S，它的面密度为 $\mu_2(x, y, z)$，则此物体的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的坐标可用类似方法推知为

$$
\begin{cases}
\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_S x\mu_2(x, y, z)\,dS}{\iint\limits_S \mu_2(x, y, z)\,dS}, \\
\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_S y\mu_2(x, y, z)\,dS}{\iint\limits_S \mu_2(x, y, z)\,dS}, \\
\bar{z}=\dfrac{\iint\limits_S z\mu_2(x, y, z)\,dS}{\iint\limits_S \mu_2(x, y, z)\,dS}.
\end{cases}
\tag{3.64}
$$

如果物体是一曲杆，其几何形状为曲线 l，它的线密度为 $\mu_1(x, y, z)$，则此物体的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 的坐标也可用类似方法推知为

$$
\begin{cases}
\bar{x}=\dfrac{\int_l x\mu_1(x, y, z)\,dl}{\int_l \mu_1(x, y, z)\,dl}, \\
\bar{y}=\dfrac{\int_l y\mu_1(x, y, z)\,dl}{\int_l \mu_1(x, y, z)\,dl}, \\
\bar{z}=\dfrac{\int_l z\mu_1(x, y, z)\,dl}{\int_l \mu_1(x, y, z)\,dl}.
\end{cases}
\tag{3.65}
$$

例 2 试求一个半径为 R，质量分布均匀的半球面的重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

解 设此半球面即为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半球面，它的

面密度 $\mu_2(x, y, z)=k$. 故此半球面 S 可用下列参数方程表示:

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi, \end{cases} \quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$$

从§3的例3可知,此时

$$dS=R^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta,$$

故

$$\iint_S kz\,dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2} kR^3\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}kR^3\,d\theta=\pi kR^3.$$

而半球面的质量易知为 $2\pi kR^2$. 于是

$$\bar{z}=\frac{\pi kR^3}{2\pi kR^2}=\frac{R}{2}.$$

由对称性可知应有

$$\bar{x}=0,\ \bar{y}=0.$$

2. 转动惯量

在空间点 $M(x, y, z)$ 处有一质量为 m 的质点,则此质点关于坐标面 yOz, zOx, xOy 的转动惯量分别为

$$I_{yz}=x^2m,\ I_{zx}=y^2m,\ I_{xy}=z^2m.$$

此质点关于 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=(y^2+z^2)m,\ I_y=(z^2+x^2)m,\ I_z=(x^2+y^2)m.$$

此质点关于原点的转动惯量为

$$I_0=(x^2+y^2+z^2)m.$$

若一个物体所占的空间为区域 V,它的体密度为 $\mu_3(x, y, z)$,则此物体的质量微元关于坐标面 yOz、zOx、xOy 的转动惯量分别为

$$x^2\mu_3(x, y, z)dv、y^2\mu_3(x, y, z)dv、z^2\mu_3(x, y, z)dv.$$

所以此物体关于坐标面 yOz, zOx, xOy 的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\mu_3(x,\ y,\ z)dv, \\ I_{zx}=\iiint\limits_V y^2\mu_3(x,\ y,\ z)dv, \\ I_{xy}=\iiint\limits_V z^2\mu_3(x,\ y,\ z)dv. \end{cases} \tag{3.66}$$

同样可知，此物体关于 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\mu_3(x,\ y,\ z)dv, \\ I_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)\mu_3(x,\ y,\ z)dv, \\ I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mu_3(x,\ y,\ z)dv. \end{cases} \tag{3.67}$$

而此物体关于原点 O 的转动惯量为

$$I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu_3(x,\ y,\ z)dv. \tag{3.68}$$

例 3 试求一个半径为 R，质量为 m 的均匀球体关于此球的一个切平面的转动惯量.

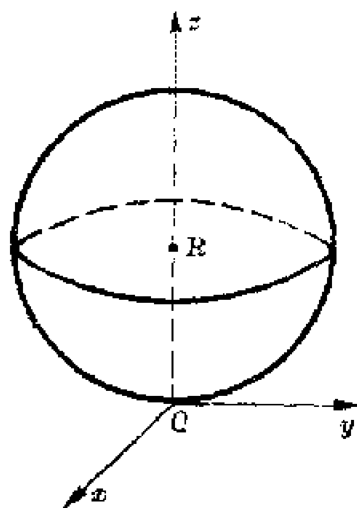


图 3.31

解 取此球体区域 V 为

$$x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2$$

（见图 3.31）. 现要求的是此球体关于坐标平面 xOy 的转动惯量 I_{xy}.

此球体的体密度为

$$\mu_3(x,\ y,\ z)=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=k.$$

采用球坐标可把区域 V 写成下列形式：

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\rho\leqslant 2R\cos\varphi.$$

于是，

$$I_{xy}=\iiint\limits_V z^2 k\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}k\rho^2\cos^2\varphi\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\frac{32}{5}kR^5\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{8}{5}\pi kR^5=\frac{6}{5}R^2m.$$

习　题

§1

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$, D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D ye^x\,dx\,dy$, D: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$;

(3) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dx\,dy$, D: $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$;

(4) $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)^{-3/2}dx\,dy$, D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$;

(5) $\iint\limits_D x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$, D: $y=x$, $y=0$, $x=1$ 所围区域.

2. 计算下列二次积分:

(1) $\int_0^\pi dx\int_0^x x\sin y\,dy$;　　(2) $\int_1^{\ln 8}dx\int_0^{\ln x}e^{x+y}dy$;

(3) $\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}y\,dy$;　　(4) $\int_1^2 dy\int_{\sqrt{y}}^y 2x\,dx$.

3. 在下列积分区域 D 上把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ 分别化成次序不同的二次积分:

(1) D: 直线 $x=3$, $y=2$, 以及两个坐标轴围成的区域;

(2) D: 直线 $x+y=1$, $x-y=1$; $x=0$ 所围成的区域;

(3) D: 直线 $y=x$ 以及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的区域;

(4) D: 由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=4-x^2$ 所围成的区域;

(5) D: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1$;　　(6) D: $(x-2)^2+(y+3)^2\leqslant 4$.

4. 更换下列二次积分的次序:

(1) $\int_1^3 dx\int_{x-2}^5 f(x,y)dy$;　　(2) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$;

(3) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)dy$;

(4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x, y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x, y)dy$;

(5) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)dy$;　　(6) $\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} f(x, y)dy$.

5. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (2x+3y)dx\,dy$, D: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$ 所围成的区域;

(2) $\iint\limits_D \cos(x+y)dx\,dy$, D: $x=0$, $y=\pi$, $y=x$ 所围成的区域;

(3) $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$, D: $y=2x$, $y=x$, $x=4$, $y=2$ 所围成的区域;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, D: $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ 所围成的区域, 其中 $a>0$;

(5) $\iint\limits_D \frac{x}{1+y}\,dx\,dy$, D: $y=x^2+1$, $y=2x$, $x=0$ 所围成的区域.

6. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, D: $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$;

(2) $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, D: $x^2+y^2\leqslant a^2$　$(a>0)$;

(3) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$;

(4) $\iint\limits_D \left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{1/2} dx\,dy$, D: $x^2+y^2\leqslant 1$ 的第一象限部分.

7. 计算 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

8. 计算 $\int_0^1 x^2\,dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

9. 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$, 其中 D 为由 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的区域.

[提示: 作变换 $x+y=u$, $y=v$.]

10. 计算 $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\,dx\,dy$, 其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 9$.

11. 计算$\iint\limits_D |y-x^2|dx\,dy$, 其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

12. 计算$\iint\limits_D (x+y)dx\,dy$, 其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant x+y$.

13. 计算$\iint\limits_D \cos\dfrac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, 其中 D: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 围成的区域.

14. 试求由极坐标表示的曲线 $r=a(1+\cos\theta)$, $r=a\cos\theta (a>0)$所围成的区域的面积.

15. 试求由曲面 $z=x^2+y^2$ 以及平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ 所围成的立体部分的体积.

16. 求曲面 $ax=y^2+z^2$ 及 $x=\sqrt{y^2+z^2} (a>0)$所围成的立体的体积.

17. 求圆锥 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ $(a>0)$截圆柱 $x^2+y^2=2y$ 的一部分立体

$$\begin{cases}-a\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant a\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2\leqslant 2y\end{cases}$$

的体积.

18. 计算$\iint\limits_D |\cos(x+y)|dx\,dy$, D: $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

§ 2

1. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, V: $1\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 2$;

(2) $\iiint\limits_V \dfrac{1}{(x+y+z)^3}\,dx\,dy\,dz$, V: $1\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 2$, $1\leqslant z\leqslant 2$;

(3) $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, V: $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$ 围成的空间区域;

(4) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dx\,dy\,dz$, V: $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的空间区域.

2. 利用柱坐标或球坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$, V: $x^2+y^2\leqslant 2z$, $z\leqslant 2$;

(2) $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

(3) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, V: $y^2=2x-x^2$, $y=0$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$ 围

成的空间区域;

(4) $\iiint\limits_V z^2 dx\,dy\,dz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$;

(5) $\iiint\limits_V (x+y+z)dx\,dy\,dz$, V: $z=h(h>0)$, $x^2+y^2=z^2$ 围成的空间区域;

(6) $\iiint\limits_V \dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx\,dy\,dz$, V: $\pi^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\pi^2$.

3. 计算 $\iiint\limits_V |xyz|dx\,dy\,dz$, V: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

4. 计算由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)$ 所围成的立体部分的体积.

5. 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分，试求这两部分体积之比.

6. (1) 证明 $\iiint\limits_V f(z)dv=\pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

(2) 计算 $\iiint\limits_V (a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0)dv$, V: 同(1).

7. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=3a^3xyz$ 所围部分限于第一卦限内的立体的体积 $(a>0)$.

8. 已知两个球的半径分别为 R 和 $r(R>r)$，且小球球心在大球球面上，试求小球在大球内那部分的体积.

§3

1. 计算下列曲面面积:

(1) 曲面 $az=xy$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 相交的那部分曲面;

(2) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分曲面;

(3) 圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 与 $y^2+z^2\leqslant R^2(R>0)$ 之交的表面.

2. 求 xOy 坐标面上的平面曲线 $y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 上自 $x=0$ 至 $x=a$ 之间一段曲线绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的面积.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b\leqslant a)$ 内那部分的面积.

4. 试求由曲面 $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}(a>0)$ 所围成的立体部分的体积与表面积.

5. 计算球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 当体密度 $\mu_0(x,\ y,\ z)=x^2+y^2$ 时的质量.

6. 试求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体部分当体密度

$\mu_3(x, y, z)=x+y$ 时的质量.

7. 由 $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=H$ ($R>0$, $H>0$) 所围成的正圆柱体的体密度 $\mu_3(x, y, z)=x^2+y^2$, 试求它的质量.

8. 如果上题中 $\mu_3(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, 试求它的质量.

9. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S\left(z+\frac{4}{3}y+2x\right)dS$, S: 平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

(2) $\iint\limits_S(x+y+z)dS$, S: 上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$;

(3) $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS$, S: $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ 所围立体部分的表面.

10. 若上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ($R>0$) 的面密度 $\mu_2(x, y, z)=x^2y^2$, 试求此半球面的质量.

11. 如果球面上每一点处的面密度的数值恰等于该点到球的某一条定直径上的距离, 试求此球面的质量.

12. 计算下列第一类曲线积分:

(1) $\int_l(x^2+y^2)dl$, l: 平面曲线 $x=a\cos t+at\sin t$, $y=a\sin t-at\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) $\int_l(x^{4/3}+y^{4/3})dl$, l: 平面曲线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$;

(3) $\int_l(x+y)dl$, l: xOy 平面上以 $(0, 0)$、$(1, 0)$、$(0, 2)$ 三点为顶点的三角形的三条边;

(4) $\int_l y\,dl$, l: 平面曲线 $y^2=2px$ 自 $(0, 0)$ 至 $(2p, 2p)$ 之间的一段;

(5) $\int_l z\,dl$, l: $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(6) $\int_l x^2\,dl$, l: 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

13. 若平面曲线 $x=a\cos t$, $y=b\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 上每一点的线密度 $\mu_1(x, y)=|y|$, 试求此曲线的质量.

14. 已知曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t(0\leqslant t\leqslant 2)$ 上每点的线密度的数值与该点到原点的距离平方成反比, 且已知在 $(1, 0, 1)$ 处的线密度 $\mu_1=1$, 求此曲线的质量.

§ 4

1. 若由圆锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成的立体部分的体密度 μ_3 是一个常量，试求此立体部分的重心.

2. 若由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体部分的体密度 μ_3 是一个常量，试求此立体部分的重心.

3. 试求圆形薄板 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 当面密度 $\mu_2(x, y)=(x-a)^2+y^2$ 时的重心.

4. 试求均匀半椭圆形薄板 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $y\geqslant 0$ 的重心.

5. 试求 § 3 第 10 题中的半球面当面密度为常量时的重心.

6. 试求 § 3 第 14 题中的曲线当线密度为常量时的重心.

7. 试求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $[0\leqslant t\leqslant \pi]$当线密度为常量时的重心($a>0$).

8. 试求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 部分的边界线当线密度为常量时的重心($a>0$).

9. 试求一个半径为 R, 质量为 m 的均匀球体关于此球的一条切线的转动惯量.

10. 试求质量为 m 的椭圆形均匀薄板 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 关于它的中心的转动惯量.

11. 若由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 与平面 $z=c$($a>0$, $b>0$, $c>0$)所围成的立体部分的体密度 μ_3 为一常数 k, 试求此立体部分关于三个坐标平面的转动惯量.

12. 求螺线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{h}{2\pi}t$($0\leqslant t\leqslant 2\pi$)当线密度为常量 ρ 时对于三个坐标轴的转动惯量.

第四章 场　论

§1 梯　度

1. 方向导数

可微函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处的三个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 分别表示函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿三个坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 方向上的变化率. 但在许多实际问题中，常常需要知道函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿某一指定方向上的变化率. 设 $\boldsymbol{l}$ 为某一给定的非零向量，现要了解函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率. 为此，取一点 $P(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$，使得向量 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的方向一致(见图 4.1). 我们用 $|\overrightarrow{MP}|\to 0$ 表示在保持 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向始终一致的条件下，点 P 趋向于点 M，并用 $f(M)$ 和 $f(P)$ 分别表示函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处和在点 $P(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 处的函数值. 显然函数 $f(x, y, z)$ 在线段 MP 上的平均变化率为 $\frac{f(P)-f(M)}{|\overrightarrow{MP}|}$. 如果极限

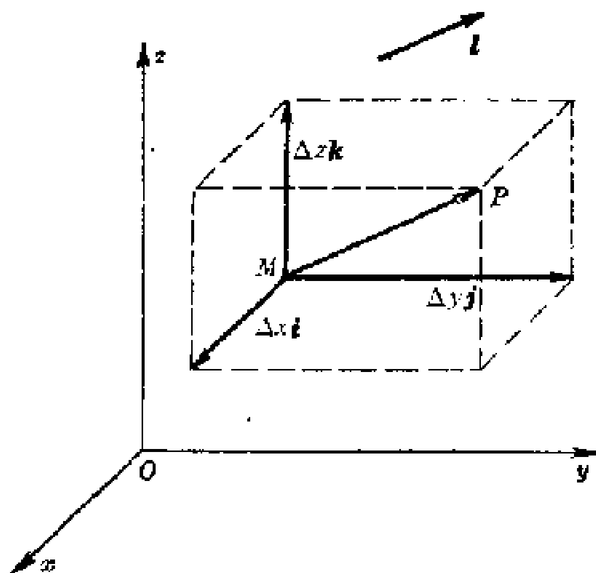


图 4.1

$$\lim_{|\overrightarrow{MP}|\to 0}\frac{f(P)-f(M)}{|\overrightarrow{MP}|} \tag{4.1}$$

存在，它即为函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率，称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方

向导数，记为 $\frac{\partial f(M)}{\partial l}$ 或 $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}$. 下面的定理将给出方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 的计算公式.

定理 4.1　设函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处可微，$\boldsymbol{l}$ 为给定的任一非零向量，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别为它的三个方向余弦，则 $f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 必存在，而且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{4.2}$$

证明　因为 $u=f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处可微，因而对于任意的 Δx、Δy、Δz 都有

$$\begin{aligned}\Delta u&=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\\&\quad+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}).\end{aligned}$$

特别地，对于使 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向一致的点 $P(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$，应也有

$$f(P)-f(M)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(|\overrightarrow{MP}|), \tag{4.3}$$

其中

$$\overrightarrow{MP}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}.$$

因为 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向一致，所以 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦也就是 $\overrightarrow{MP}$ 的方向余弦. 于是有

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{|\overrightarrow{MP}|},\quad \cos\beta=\frac{\Delta y}{|\overrightarrow{MP}|},\quad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{|\overrightarrow{MP}|}.$$

将式(4.3)的两边都除以 $|\overrightarrow{MP}|$，得

$$\begin{aligned}\frac{f(P)-f(M)}{|\overrightarrow{MP}|}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{|\overrightarrow{MP}|}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{|\overrightarrow{MP}|}\\&\quad+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{|\overrightarrow{MP}|}+\frac{o(|\overrightarrow{MP}|)}{|\overrightarrow{MP}|}.\end{aligned}$$

所以当$|\overrightarrow{MP}|\to 0$时，由上式便知极限(4.1)必存在，而且式(4.2)也成立.

例 1　设函数$f(x, y, z)=2x^2y+z$，$\boldsymbol{l}=-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. 试求在点$M(1, 0, 1)$处的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

解　显然函数$f(x, y, z)$在点$M(1, 0, 1)$处是可微的. 它在该点处的三个偏导数分别为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2=2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=1.$$

向量$\boldsymbol{l}$的三个方向余弦分别为

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=-\frac{4}{5},\ \cos\gamma=\frac{3}{5}.$$

于是
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=-1.$$

2. 数量场与向量场

设函数$f(x, y, z)$在R^3空间的区域Ω上有定义，这时Ω中任一点$M(x, y, z)$都对应着一个数值$f(x, y, z)$. 我们有时也称函数$f(x, y, z)$为区域Ω上的一个数量场. 例如，占有空间区域V的物体，它的体密度为$\mu(x, y, z)$，则函数$\mu(x, y, z)$就是区域V上的一个数量场.

设向量函数

$$\boldsymbol{a}(x, y, z)=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

在R^3空间的区域Ω上有定义，这时Ω中任一点$M(x, y, z)$都对应着一个向量$\boldsymbol{a}(x, y, z)$. 我们有时也称向量函数$\boldsymbol{a}(x, y, z)$为区域Ω上的一个向量场.

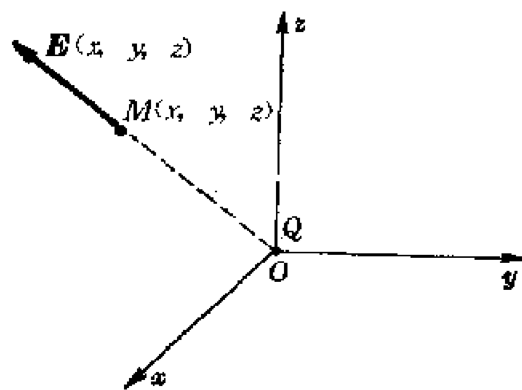


图 4.2

例 2　在直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$的原点处放有一个电量为$Q$的点电荷(图 4.2). 于是空间内除原点外的任一点$M(x, y, z)$处都有一个电场强度(即单位正

电荷在该点处所受的力)．根据库仑定律可知，此电场强度 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$可写成下列形式：

$$\boldsymbol{E}(x, y, z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}),$$

其中 ε_0 为真空的介电系数．向量函数 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$就是 R^3 空间中除原点外的区域上的一个向量场．

3．数量场的梯度

定义 4.1　设函数 $u(x, y, z)$在点 $M(x, y, z)$处可微，在点 $M(x, y, z)$处的三个偏导数分别为 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$，则向量

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{4.4}$$

称为数量场 $u(x, y, z)$在点 $M(x, y, z)$处的梯度．

我们先讨论求梯度的运算，然后解释梯度的意义．

例 3　试求函数 $u(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 $M(1, -1, 1)$处的梯度 $\operatorname{grad} u$．

解　函数 $u(x, y, z)$在点 $M(1, -1, 1)$ 处的三个偏导数分别为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y=-2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z=2.$$

于是点 $M(1, -1, 1)$处的梯度

$$\operatorname{grad} u=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

由于求梯度运算实际上就是求偏导数，因而它具有与求偏导数类似的运算法则．设 u、u_1、u_2 都是 (x, y, z)的函数，$F(u)$为(x, y, z)的复合函数，则关于梯度的基本运算法则如下：

(1)　$\operatorname{grad}(u_1+u_2)=\operatorname{grad} u_1+\operatorname{grad} u_2$;　　(4.5)

(2)　$\operatorname{grad}(u_1u_2)=u_1\operatorname{grad} u_2+u_2\operatorname{grad} u_1$;　　(4.6)

(3)　$\operatorname{grad}(F(u))=F'(u)\operatorname{grad} u$.　　(4.7)

例 4　设 $u=x^2+y^2+z^2$，$F(u)=\sin u$．试求梯度 $\operatorname{grad}(\sin(x^2+y^2+z^2))$．

解　由公式(4.7)便得：

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}(\sin(x^2+y^2+z^2))=\operatorname{grad}(F(u))\\=&F'(u)\operatorname{grad}u=\cos u(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k})\\=&2\cos(x^2+y^2+z^2)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

下面考察梯度的模和方向的意义，设函数 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处可微，$\boldsymbol{l}$ 为某一给定的非零向量，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别为 $\boldsymbol{l}$ 的三个方向余弦，$\boldsymbol{l}_0$ 为一个与 $\boldsymbol{l}$ 方向一致的单位向量，即

$$\boldsymbol{l}_0=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}.$$

于是 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 可写成下列形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\underline{\operatorname{grad}u\cdot\boldsymbol{l}_0}\\&=|\operatorname{grad}u|\cos(\widehat{\operatorname{grad}u,\boldsymbol{l}}).\end{aligned}\tag{4.8}$$

当 $\boldsymbol{l}$ 方向与函数 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处的梯度 $\operatorname{grad}u$ 方向一致时，$\cos(\widehat{\operatorname{grad}u,\boldsymbol{l}})=1$，从而 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 达到最大值．也就是说，当 $\boldsymbol{l}=\operatorname{grad}u$ 时，函数 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 的值最大．这时

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad}u|.$$

这说明函数 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿梯度 $\operatorname{grad}u$ 方向的变化率最大（增大最快），其变化率就等于梯度的模 $|\operatorname{grad}u|$．当 $\boldsymbol{l}=-\operatorname{grad}u$ 时，$\cos(\widehat{\operatorname{grad}u,\boldsymbol{l}})=-1$，从而方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-|\operatorname{grad}u|.$$

这说明 $u(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处沿负梯度 $-\operatorname{grad}u$ 方向的变化率最小（减小最快），为 $-|\operatorname{grad}u|$．

曲面 $u(x, y, z)=c$（其中 c 是一个常数）称为数量场 $u(x, y, z)$ 的等值面．在此曲面上每一点 (x, y, z) 都对应于同一数值 c．若

$M(x, y, z)$为等值面$u(x, y, z)=c$上的一点，且函数$u(x, y, z)$在点M处可微，易知向量

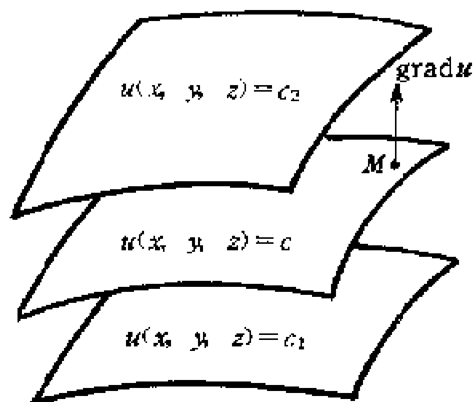


图 4.3

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

是等值面$u(x, y, z)=c$在点M处的法向量.由梯度的定义式(4.4)便知点M处的梯度$\mathrm{grad}\,u$即为点M所在的等值面$u(x,y,z)=c$在点M处的法向量，且指向函数值增大的一侧(参看图4.3,其中$c_1<c<c_2$).

如果用$\boldsymbol{n}_0$表示点M所处的等值面$u(x, y, z)=c$在点M处的单位法向量，且它指向$u(x, y, z)$值增大的一侧，则$u(x, y, z)$在点$M(x, y, z)$处的梯度就可以写成下列形式：

$$\mathrm{grad}\,u=\left(\frac{\partial u}{\partial n_0}\right)\boldsymbol{n}_0. \tag{4.9}$$

梯度的这个表达式不依赖于坐标系，因而可以用它直接作为梯度的定义,而式(4.4)则为梯度在直角坐标系中的表示形式.

§2 曲面积分

1. 曲面积分的概念

首先给出有向曲面的概念.在第二类型曲面积分的定义中，不仅要给定曲面,而且还需要指出曲面的侧.例如,对于一个闭球面,我们需要把它区分出球面的外侧和内侧;对于一个处于水平位置的平面,我们区分它的上侧和下侧.一般地说,我们考察的都是双侧曲面,即这种曲面可以区分为两个侧.当指定了其中一侧后，这种曲面就是*有向曲面*，指定的一侧称为*正侧*，另一侧称为*负侧*.我们还规定有向曲面上的法向量均指向曲面的正侧.例如，闭球面外侧上的法向量均朝外,闭球面内侧的法向量均朝内指向球心.这样,给定了有向曲面后,其上任一点的法向量的指向也完全确定了.

下面我们给出曲面积分(第二类曲面积分)的定义.

定义 4.2 设 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$为一个在 S 上有定义的向量场, S 为一块光滑的有向曲面. 把有向曲面 S 任意分割成 n 块小有向曲面 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$, 小曲面 ΔS_i 的面积也用 ΔS_i 表示, 用 d_i 表示小曲面 ΔS_i 的直径, $d=\max\{d_i\}$, 并且在每一块小曲面 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$. $\boldsymbol{n}_i$ 为有向曲面 S 在点 $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$处的单位法向量. 令向量

$$\Delta \boldsymbol{S}_i = \Delta S_i \boldsymbol{n}_i.$$

如果极限
$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$
存在,且与 ΔS_i 的分法以及点 M_i 的取法都无关, 则称极限为向量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$在有向曲面 S 上的曲面积分, 记为$\iint\limits_S \boldsymbol{a}(x, y, z)\cdot d\boldsymbol{S}$, 即

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}(x, y, z)\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i. \quad (4.10)$$

这种曲面积分也称为第二类曲面积分.

从上述定义容易知道曲面积分具有下列性质.

(1) $$\iint\limits_S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint\limits_S \boldsymbol{b}\cdot d\boldsymbol{S}. \quad (4.11)$$

(2) $$\iint\limits_S k\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=k\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (k \text{ 为常数}). \quad (4.12)$$

(3) 若有向曲面 S 分割成 S_1 和 S_2(S_1 和 S_2 的正侧与 S 的正侧一致), 则

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_{S_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint\limits_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}. \quad (4.13)$$

(4) 若以 S^+ 和 S^- 分别表示同一曲面 S 由于指定的侧不同而形成的不同的有向曲面, 则

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=-\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}. \quad (4.14)$$

下面通过两个例子给出曲面积分的物理解释. 为此, 先将曲面积分$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$叙述为"微元求和"形式:

(1) 分割有向曲面 S 为一些小曲面块;

(2) 对每个小曲面块定义有向面积微元 $d\boldsymbol{S}$: 模为小曲面面积 dS, 方向与小曲面上一点 M 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 相同, 再作微元

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{a}|dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}});\tag{4.15}$$

(3) 求这些微元之和的极限, 即得曲面积分$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$.

例 1　流体穿过指定曲面的流量 Q. 设 S 是一个有向曲面, $\boldsymbol{a}(x, y, z)$为流体的流速场, 那末, 每单位时间内沿 S 的法向 $\boldsymbol{n}$ 方向穿过小曲面块 dS 的流体数量 ΔQ 的绝对值(负值表示沿 $\boldsymbol{n}$ 的反向穿过)近似等于以 dS 为底, $|\boldsymbol{a}|$为棱的柱体体积, 即

$$dQ=\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

于是

$$Q=\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S},$$

就是说, 流体的流速场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上的曲面积分即为流体沿 S 法向穿过曲面 S 的流量(参见图 4.4).

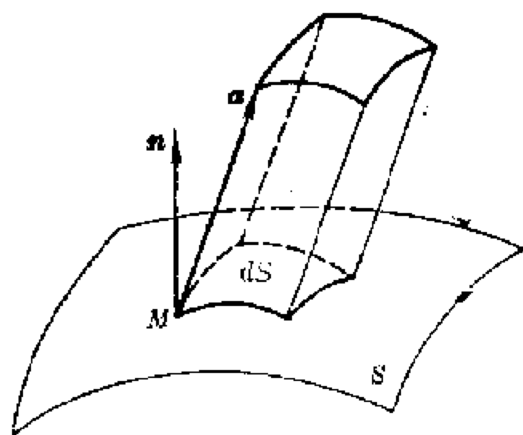


图　4.4

如果有向曲面 S 为闭球面, 它的法向均朝外, 流量 Q 就是指单位时间内从球内流到球外的流体数量; 如果有向曲面 S 为闭球面, 它的法向均朝内, 则流量 Q 就是指单位时间内从球外流到球内的流体数量.

例 2　电通量. 设静电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$. 为了形象地描述这个电场, 物理学中引进电力线概念. 它是一种假想的曲线. 这种曲线是有方向的, 电场内每一点处的电场强度的方向恰为通过该点的电力线在这一点处的切线方向. 电力线在该点处的

密度(通过单位横截面的电力线数目)表示该点处电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的模.

给定一个有向曲面 S, 穿过曲面 S 的电力线中, 有的可能是沿着 S 的法向 $\boldsymbol{n}$ 穿过 S, 有的可能是沿着 $\boldsymbol{n}$ 的反向穿过 S(见图 4.5). 计算穿过有向曲面 S 的电力线时, 沿法向 $\boldsymbol{n}$ 穿过的电力线计数为正, 沿 $\boldsymbol{n}$ 的反向穿过 S 的电力线计数为负. 两者的代数和称为电通量, 记为 Φ_e. 下面说明

$$\Phi_e=\iint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

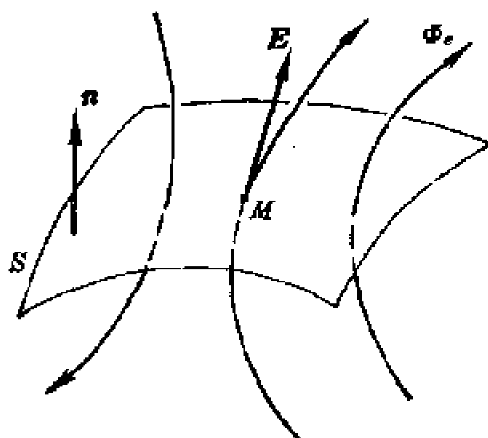


图 4.5

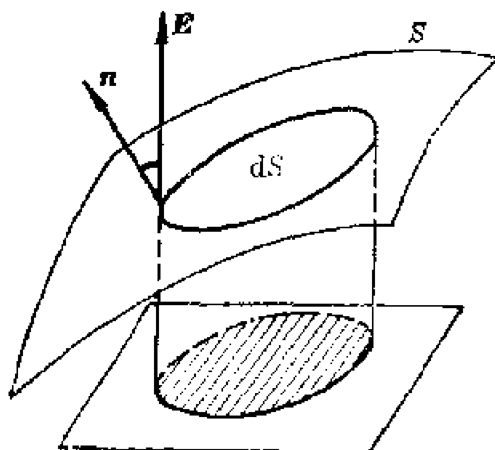


图 4.6

事实上, 从示意图 4.6 可见, 面积微元 dS 在以 $\boldsymbol{E}$ 为法向量的平面上的投影为 $dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}})$. 进一步, 按照单位面积上电力线数的规定, 便得

$$d\Phi_e=|\boldsymbol{E}|dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}})=\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

从而便得

$$\Phi_e=\iint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

由此可见, 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在有向曲面 S 上的曲面积分等于通过曲面 S 的电通量 Φ_e.

2. 曲面积分的计算

设向量场

$$\boldsymbol{a}(x, y, z)=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

有向曲面 S 与平行于 x 轴或 y 轴或 z 轴的直线都至多只有一个交点. 区域 D_{xy}、D_{yz}、D_{zx} 分别为曲面 S 在坐标面 xOy、yOz、zOx 上的投影. 现考察小曲面 $d\boldsymbol{S}$ 在坐标面 xOy 上的投影 $d\sigma$ (见图 4.7). 从式(3.42), 易知

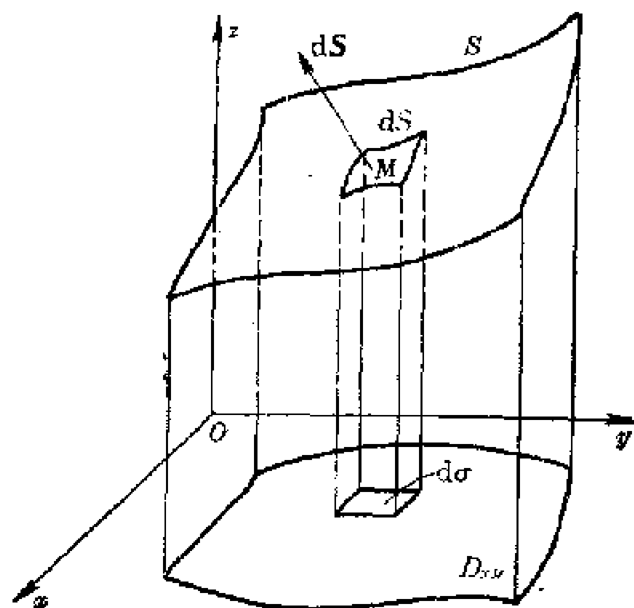


图 4.7

$$\pm d\sigma = dS\cos\gamma,$$

其中 $dS=|d\boldsymbol{S}|$, 即为曲面 S 的面积微元, γ 为 $d\boldsymbol{S}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角. 上式中, 当 γ 为锐角时取正号, 当 γ 为钝角时取负号. 因为在直角坐标系中 $d\sigma = dx\,dy$. 因而进一步可有

$$\cos\gamma\, dS = \pm dx\,dy. \tag{4.16}$$

同样可得

$$\cos\beta\, dS = \pm dz\,dx, \tag{4.17}$$

$$\cos\alpha\, dS = \pm dy\,dz, \tag{4.18}$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 分别为 $d\boldsymbol{S}$ 的三个方向余弦. 所以 $d\boldsymbol{S}$ 又可写成如下形式:

$$d\boldsymbol{S} = dS(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}). \tag{4.19}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \pm a_x(x,\ y,\ z)\,dy\,dz \pm a_y(x,\ y,\ z)\,dz\,dx \pm a_z(x,\ y,\ z)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{4.20}$$

这样, 曲面积分 $\iint\limits_S \boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)\cdot d\boldsymbol{S}$ 就化成下面三个重积分之和:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S [a_x(x,y,z)\cos\alpha+a_y(x,y,z)\cos\beta+a_z(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

$$=\pm\iint_{D_{yz}} a_x(x,y,z)\,dy\,dz\pm\iint_{D_{zx}} a_y(x,y,z)\,dz\,dx$$

$$\pm\iint_{D_{xy}} a_z(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{4.21}$$

应用上述公式计算曲面积分时，还应注意下列几点：

(1) 三个重积分前面的正负号的选取应分别依照有向曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与三个坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 之夹角 α、β、γ 是锐角还是钝角来决定．当夹角为锐角时取正号，为钝角时取负号．

(2) D_{yz}、D_{zx}、D_{xy} 分别为曲面 S 在 yOz、zOx、xOy 三个坐标面上的投影区域．

(3) a_x, a_y, a_z 都是 (x,y,z) 之函数，而 (x,y,z) 相应的点都应在曲面 S 上．

例 3 试求向量 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ 通过有向曲面 S 的曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$，其中 S 由图 4.8 所示的长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体的两块表面 S_1 和 S_2 组成，它们的法向量均指向长方体外．

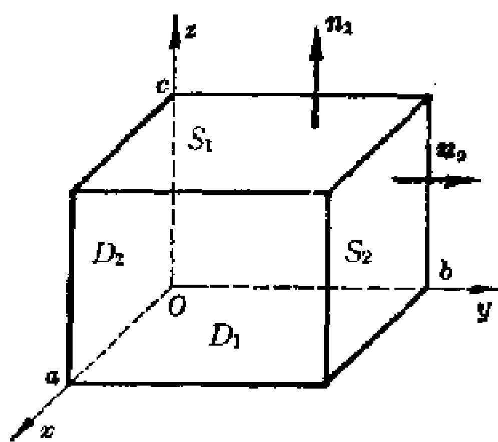


图 4.8

解 由式(4.13)，可得

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

从图 4.8 易知，平面 S_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 方向一致．于是从式(4.21)便得：

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=0+0+\iint_{D_1} xyz\,dx\,dy.$$

注意到平面 S_1 上点 (x,y,z) 的坐标中 $z\equiv c$，就有

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{D_1} xyz\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^b xyc\,dy=\frac{1}{4}a^2b^2c.$$

同样可得

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{D_2} xyz\,dz\,dx=\int_0^a dx\int_0^c xbz\,dz=\frac{1}{4}a^2bc^2.$$

最后得到

$$\iint_{S} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{4}a^2bc(b+c).$$

例 4　设 $\boldsymbol{a}(x, y, z)=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$, S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧，试求曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$.

解　易知在上半球面 S_1 上, $d\boldsymbol{S}$ 的方向余弦中 $\cos\gamma\geqslant 0$, 而在下半球面 S_2 上, $d\boldsymbol{S}$ 的方向余弦 $\cos\gamma\leqslant 0$. 所以计算曲面积分 $\iint_{S_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 时，公式(4.21)中第三个重积分应为

$$\iint_{D_{xy}} \left(c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 dx\,dy.$$

计算 $\iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 时，公式(4.21)中第三个重积分应为

$$-\iint_{D_{xy}} \left(c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right)^2 dx\,dy.$$

D_{xy} 为 xOy 坐标面上的平面区域: $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$. 所以在计算曲面积分 $\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 时，公式(4.21)中第三个重积分应为上两项之和，即为

$$\iint_{D_{xy}} 4c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy.$$

易知重积分 $\iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy$ 即为此球体的上半球体的体积，其值为 $\frac{2}{3}\pi R^3$. 故

$$\iint_{D_{xy}} 4c\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy=\frac{8}{3}\pi R^3 c.$$

同样可知，利用公式(4.21)计算曲面积分$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$时，第一个和第二个重积分的值分别为$\frac{8}{3}\pi R^3 a$和$\frac{8}{3}\pi R^3 b$. 于是最后得

$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

3. 曲面积分的另一定义形式

曲面积分的概念并不一定要从向量场的角度给出. 从数量场出发同样可对曲面积分进行定义. 下面我们采用微元求和的形式介绍这种定义.

设S为一个光滑的有向曲面，$R(x, y, z)$为定义在S上的有界函数，分割曲面S为一些小曲面块. dS为S的面积微元，M为dS上的任一点，$\boldsymbol{n}$为有向曲面S在点M处的法向量，γ为法向量$\boldsymbol{n}$与坐标向量$\boldsymbol{k}$的夹角. 作微元

$$R(x, y, z)\cos\gamma\, dS.$$

求这些微元的和，就得到积分

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS.$$

从式(4.16)我们已知：

$$\cos\gamma\, dS=\pm dx\, dy.$$

因此我们也把上述积分写成下列形式：

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

称它为$R(x, y, z)$沿有向曲面S的曲面积分(第二类曲面积分). 但在计算$\iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy$时，应注意到式(4.16)内的正负号.

类似地，还可以定义曲面积分

$$\iint\limits_S Q(x, y, z)\,dz\,dx \quad 和 \quad \iint\limits_S P(x, y, z)\,dy\,dz.$$

注意到 $$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy=\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\,dS$$

和式(4.21)便知,如果

$$\boldsymbol{a}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

则 $$\iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz+Q(x, y, z)\,dz\,dx+R(x, y, z)\,dx\,dy$$

$$=\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{4.22}$$

下面讨论这些积分的计算法则. 如果光滑的有向曲面 S 由下列方程给出

$$z=z(x, y),$$

S 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D_{xy}. 那末就可把曲面积分 $\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy$ 化成为一个二重积分,即

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy=\pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy, \tag{4.23}$$

其中等式右端正负号的选取应根据有向曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角 γ 来决定. 当 γ 为锐角时取正,为钝角时取负.

类似地,还可以得到下面的公式:

$$\iint_S Q(x, y, z)\,dz\,dx=\pm\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z)\,dz\,dx, \tag{4.24}$$

和

$$\iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz=\pm\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dy\,dz. \tag{4.25}$$

这两个公式中,右端正负号的选取也根据类似的法则.

例 5 计算曲面积分 $\iint_S xy^2z^2\,dx\,dy$, 其中有向曲面 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于 $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$ 部分的外侧(见图 4.9).

解 易知，曲面 S 的方程为

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

S 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角总小于或等于 $\frac{\pi}{2}$. 应用公式(4.23)可得

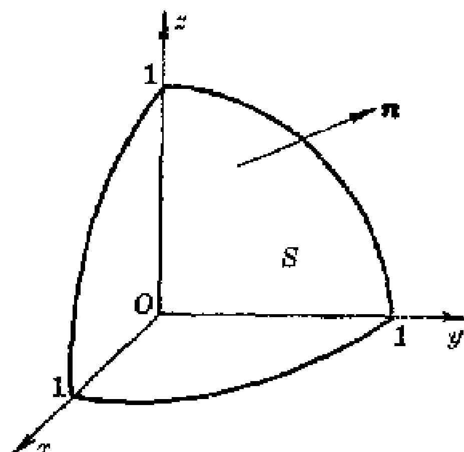


图 4.9

$$\iint_S xy^2z^2\,dx\,dy=\iint_{D_{xy}} xy^2(1-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

D_{xy} 为坐标面 xOy 上的平面区域: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$. 应用极坐标计算上面的二重积分，有

$$\iint_{D_{xy}} xy^2(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1(1-r^2)r^4\sin^2\theta\cos\theta\,dr$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1(1-r^2)r^4\,dr=\frac{2}{105}.$$

如果有向曲面 S 由下列参数方程给出:

$$\begin{cases}x=x(u,\ v),\\ y=y(u,\ v),\\ z=z(u,\ v).\end{cases}$$

其中 $(u,\ v)$ 的变化区域为 D_{uv}, 那么，由式(3.56)知，曲面 S 的面积微元

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

还可以知道，有向曲面 S 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角 γ 的余弦

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|,$$

其中等式右端的正负号对应曲面的两个侧. 于是曲面积分

$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$ 便可化成为一个二重积分，即

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{uv}} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv. \tag{4.26}$$

类似地，还可以得到下面的公式：

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{uv}} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|dudv, \tag{4.27}$$

和

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz$$
$$=\pm\iint\limits_{D_{uv}} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|dudv. \tag{4.28}$$

例 6　计算曲面积分 $\iint\limits_S z^5 dxdy$，其中有向曲面 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上半部分的外侧（$a>0,\ b>0,\ c>0$）。

解　用下列参数方程表示曲面 S：

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta, \\ y=b\sin\varphi\sin\theta, \\ z=c\cos\varphi. \end{cases} \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$$

为了应用公式(4.26)，先计算 $\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\theta & -a\sin\varphi\sin\theta \\ b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$=ab\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta+ab\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta$$
$$=ab\cos\varphi\sin\varphi.$$

因为有向曲面 S 为上半椭球面的外侧，因而 S 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角 γ 的余弦应非负，即

$$\cos\gamma \geqslant 0.$$

注意到 $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \theta)}$，故应用公式 (4.26) 时应取正号. 于是有

$$\begin{aligned}\iint_S z^3\,dx\,dy &= \iint_{D_{\varphi\theta}} abc^3\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} abc^3\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{2}{5}\pi abc^3.\end{aligned}$$

§3 高斯公式和散度

1. 高斯公式

如果 S 是一个闭曲面，V 是由 S 围成的空间有界闭区域，下面定理将给出沿边界曲面 S 的外侧的曲面积分与区域 V 上的重积分之间的联系.

定理 4.2[高斯(Gauss)] 设向量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 的分量 a_x, a_y, a_z 在有界闭区域 V 上的各种一阶偏导数都存在且连续，V 的边界面 S 为一个分片光滑的有向闭曲面(正向为边界面的外侧)，则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV = \oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{4.29}$$

证明 我们先假设，任一平行于坐标向量的直线与曲面 S 至多有两个交点. 这时曲面 S 可以分成上、下两部分，上部曲面 S_2 的方程为 $z=z_2(x, y)$，下部曲面 S_1 的方程为 $z=z_1(x, y)$. 并设区域 V 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D_{xy}(见图 4.10). 于是三重积分

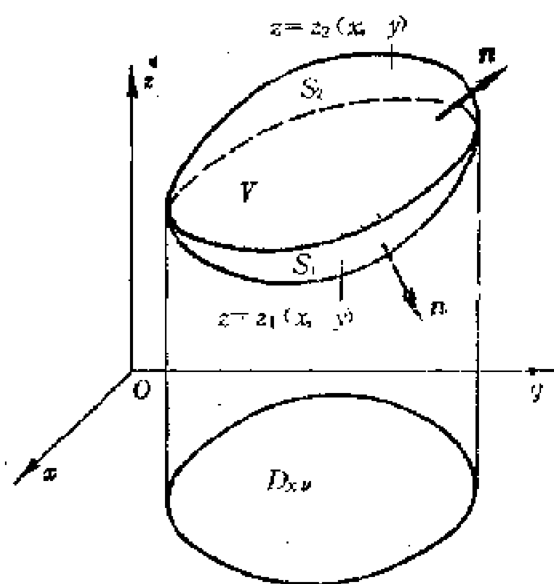


图 4.10

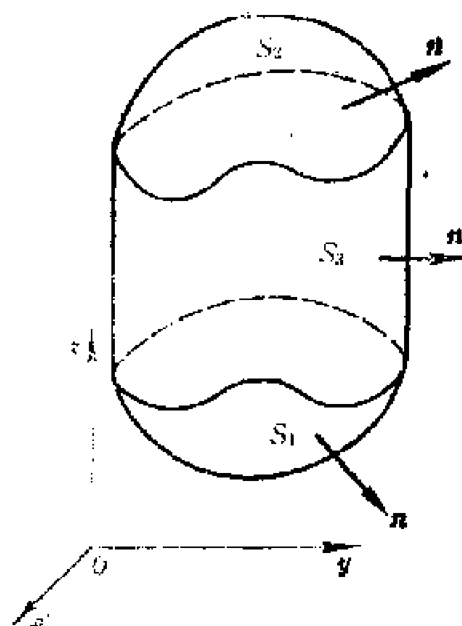


图 4.11

$$\iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \iint dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} [a_z(x, y, z_2(x, y))$$

$$- a_z(x, y, z_1(x, y))]\,dx\,dy. \qquad (4.30)$$

又因为 S_2 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为锐角，而 S_1 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的夹角为钝角. 故从式(4.30)可知，$\iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV$ 实际上就是应用公式(4.21)计算曲面积分 $\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 时的第三个重积分. 同样可知，$\iiint_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV$ 和 $\iiint_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV$ 分别为应用公式(4.21)计算曲面积分 $\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 时的第一个和第二个重积分. 这样就可得到公式(4.29).

其次，设曲面 S 中含有母线平行于坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的柱面，如图4.11所示. 曲面 S 分成 S_1, S_2 和 S_3 三部分，S_3 为母线平行于 $\boldsymbol{k}$ 的柱面. 由于柱面 S_3 上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 均与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，故利用式(4.21)

计算曲面积分$\iint\limits_{S_3}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$时，第三个重积分的值为零．于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V\frac{\partial a_z}{\partial z}dV&=\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial a_z}{\partial z}dz\\&=\iint\limits_{D_{xy}}[a_z(x,y,z_2(x,y))-a_z(x,y,z_1(x,y))]dxdy\\&=\iint\limits_{S_1}a_z\cos\gamma dS+\iint\limits_{S_1}a_z\cos\gamma\,dS+\iint\limits_{S_3}a_z\cos\gamma\,dS\\&=\iint\limits_S a_z\cos\gamma\,dS.\end{aligned}$$

因而$\iiint\limits_V\frac{\partial a_z}{\partial z}dV$仍等于应用公式(4.21)计算曲面积分$\oiint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$时的第三个重积分．同样，$\iiint\limits_V\frac{\partial a_x}{\partial x}dV$和$\iiint\limits_V\frac{\partial a_y}{\partial y}dV$分别为应用公式(4.21)计算曲面积分$\oiint\limits_S\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$时的第一个和第二个重积分．因此公式(4.29)仍成立．

最后，设平行于坐标向量的直线与S的交点多于两点，这时可将区域V适当分成若干小区域，使得每个小区域的边界面与平行坐标向量的直线至多有两个交点，或者边界面上含有母线平行于某个坐标向量的柱面．如图4.12所示之情形，将V分成V_1和V_2两部分，使之符合上述条件，然后对V_1和V_2分别应用公式(4.29)．因为分隔区域V_1和V_2的界面S'的两个侧面S'_+和S'_-分别为V_1和V_2的边界面外侧的一部分，由式(4.14)便知，有

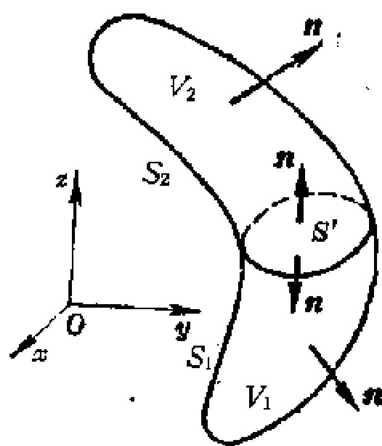


图 4.12

$$\iint\limits_{S'_+}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}+\iint\limits_{S'_-}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=0.$$

因而

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

$$=\iiint\limits_{V_1}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

$$+\iiint\limits_{V_2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV=\oint\!\!\!\oint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

故公式(4.29)仍成立. ▌

例1 设向量场 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧, 试求曲面积分 $\oint\!\!\!\oint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$.

解 应用公式(4.29), 有

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV$$

$$=\iiint\limits_{V}(1+1+1)dV=4\pi R^3.$$

例2 设向量场 $\boldsymbol{a}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$, 有向闭曲面 S 为以平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ 所围成的立方体区域 V 的边界面外侧. 试求曲面积分 $\oint\!\!\!\oint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot dS$.

解 由于

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=2+x^2-2xz,$$

故应用公式(4.29)便有

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{V}(2+x^2-2xz)dV$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(2+x^2-2xz)dz=\frac{11}{6}.$$

例3 试求曲面积分

$$\iint\limits_{S}(y^2-x)dy\,dz+(z^2-y)dz\,dx+(x^2-z)dx\,dy,$$

其中 S 是曲面 $z=2-x^2-y^2(1\leqslant z\leqslant 2)$ 的上侧.

解 易知,由曲面 S 和平面 $z=1$ 组成一个闭曲面 Σ. 因而 S 上的曲面积分等于沿 Σ 外侧的曲面积分减去沿平面 $z=1$ 下侧 S_1 的曲面积分,即

$$\iint_S (y^2-x)\,dy\,dz+(z^2-y)\,dz\,dx+(x^2-z)\,dx\,dy$$
$$=\oiint_\Sigma (y^2-x)\,dy\,dz+(z^2-y)\,dz\,dx+(x^2-z)\,dx\,dy$$
$$-\iint_{S_1}(y^2-x)\,dy\,dz+(z^2-y)\,dz\,dx+(x^2-z)\,dx\,dy.$$

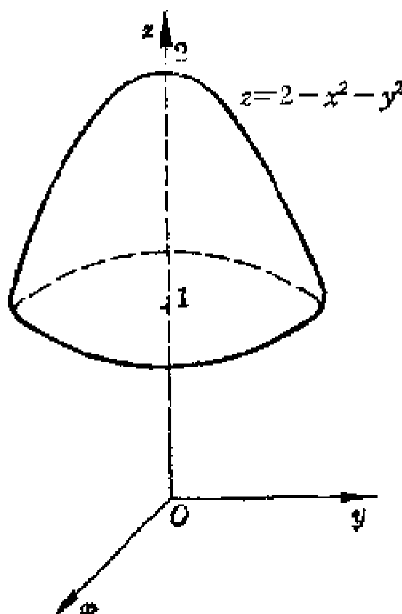


图 4.19

应用公式(4.29)计算沿 Σ 外侧的曲面积分并注意到式(4.22),有

$$\oiint_\Sigma (y^2-x)\,dy\,dz+(z^2-y)\,dz\,dx+(x^2-z)\,dx\,dy$$
$$=\iiint_V[(-1)+(-1)+(-1)]\,dx\,dy\,dz.$$

其中 V 是以闭曲面为边界面的有界区域. 应用柱坐标计算上述等式右端的三重积分,有

$$\iiint_V(-3)\,dV=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_1^{2-r^2}dz$$
$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(2-r^2-1)\,dr$$
$$=-\frac{3}{2}\pi.$$

易知,平面 $z=1$ 的下侧的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦分别为:

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=-1.$$

故利用公式(4.21)有(其中 xOy 上的区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$)

$$\iint_{S_1}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$$
$$=\iint_D(1-x^2)dxdy=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy$$
$$=\int_{-1}^{1}2(1-x^2)^{3/2}dx\xlongequal{x=\sin\theta}2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\pi.$$

最后得到

$$\iint_S(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$$
$$=-\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi=-\frac{9}{4}\pi.$$

2. 散度

定义 4.3　设 $\boldsymbol{a}$ 为一个向量场，V 为向量场中包含点 M 的一个小区域，它的边界面为分片光滑的有向曲面 S，正向为其外侧．用 V 表示小区域 V 的体积，d 为小区域 V 的直径．如果极限

$$\lim_{d\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

存在且与 V 的取法无关，则称它为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处的散度，记为 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M$，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M=\lim_{d\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}\qquad(4.31)$$

请注意，向量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ 为一个数量场．下面我们要给出散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系内的形式，以便进行计算．

设向量场 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量 $a_x(x,y,z)$、$a_y(x,y,z)$、$a_z(x,y,z)$ 的各种一阶偏导数都存在且连续，V 为包含点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的一个小区域，它的直径为 d，它的边界面（正向为其外侧）是一个分片光滑的有向曲面 S．根据定理 4.2，可得

$$\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV.$$

又由重积分的中值定理，有

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dV=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bigg|_{M'}\cdot V,$$

其中点 M' 为小区域 V 中的某一点. 从上面两个等式进一步可得

$$\frac{\oiint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bigg|_{M'}.$$

现考察 $d\to 0$ 时的极限. 根据定义 4.3, 上式左端的极限即为 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M$; 而等式右端从连续性便知，其极限即为 $\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\bigg|_M$. 因而便得到下列公式:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M=\frac{\partial a_x}{\partial x}\bigg|_M+\frac{\partial a_y}{\partial y}\bigg|_M+\frac{\partial a_z}{\partial z}\bigg|_M. \tag{4.32}$$

由此我们还可以知道定理 4.2 中式(4.29)也可改写成下列形式:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{a}=\oiint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{4.33}$$

例 4 设向量场 $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+2x^2y\boldsymbol{k}$. 试求向量场 $\boldsymbol{a}$ 在点 $M(1,\ -1,\ 2)$ 处的散度.

解 由式(4.32)，得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=z-2y,$$

故

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M=2+2=4.$$

下面我们通过两个例子给出散度的物理解释.

例 5 流速场的散度. 设 $\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+a_z(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$ 为流体的流速场，其中 a_x、a_y、a_z 均是连续函数. V 为包含点 $M(x,y,z)$ 的一个有界区域，它的体积也用 V 表示，d 表示其直径，它的界面(正向为其外侧)是一个分片光滑的有向曲面 S.

从§2的例1我们已知 $\oiint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 即为单位时间内从 V 内穿过界面 S 流到 V 外的流体的数量. 如果 $\oiint\limits_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}>0$, 则说明 V

内必具有能散发流体的“正流源”；如果 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}<0$，则说明 V 内必具有能吸收流体的“负流源”.

现在我们把流速场内每点都看作具有一定散发(吸收看作负的散发)流体能力的流源．为了进一步对流源散发流体的能力作定量的描述，引进“流源强度”的概念：如果具有单位体积的空间区域内每点都是具有相同的散发流体能力的流源，则此空间区域在单位时间内向外散发流体的数量就称为这种流源的“流源强度”.

易知，这时流速场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 在点 M 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}|_M=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$ 就是点 $M(x, y, z)$ 处的“流源强度”.

例 6　**静电场的散度**．设 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ 为静电场的电场强度，V 为包含点 $M(x, y, z)$ 的一个有界区域，它的体积也用 V 表示，d 为区域 V 的直径，V 的边界面(正向为其外侧)是一个分片光滑的有向曲面 S.

从§2的例2我们已知 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 即为从 V 内穿过界面 S 到 V 外的电通量．如果 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}>0$，则说明 V 内必具有能发生电力线的“正源头”；如果 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}<0$，则说明 V 内必具有终止电力线的“负源头”.

现在我们把静电场内每点都看作具有发生(终止看作负发生)电力线能力的源头．为了对源头发生电力线的能力作定量的描述，引进“源头强度”的概念：如果具有单位体积的空间区域内每点都是具有相同发生电力线能力的源头，则从此空间区域内穿过界面到区域外的电力线的代数和(即电通量)，称为这种源头的“源头强度”.

易知，静电场 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ 在点 M 处的散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}|_M=\lim_{d\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

就是点 $M(x, y, z)$ 处的"源头强度".

§4 旋度和斯托克斯公式

1. 曲线积分

设 l 为一段曲线弧, A、B 为 l 的两个端点. 若我们规定其中一个端点 A 为起点, 另一个端点 B 为终点, 则 l 就称为一条自点 A 到点 B 的有向曲线.

定义 4.4 设 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 为一个向量场, l 为一条分段光滑的自点 A 到点 B 的有向可求长曲线. $\boldsymbol{a}$ 在 l 上有定义. 在 l 上从点 A 起顺次插入 $n-1$ 个分点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$, 并把点 A 看作 P_0, 把点 B 看作点 P_n. 这样就把 l 分成 n 段有向曲线 $\Delta l_0, \Delta l_1, \cdots, \Delta l_{n-1}$, 其中 Δl_i 的起点为 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, 终点为 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$. 令向量

$$\Delta\boldsymbol{l}_i=\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\quad(i=0, 1, \cdots, n-1),$$

把它的模 $|\Delta\boldsymbol{l}_i|$ 记为 λ_i, 并在每段 Δl_i 上任取一点 $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$. 如果下列极限存在:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{a}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{l}_i,$$

其中 $\lambda=\max\{\lambda_i|i=0, 1, \cdots, n-1\}$, 而且与 Δl_i 的分法以及点 $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ 的取法都无关, 则称此极限为向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿有向曲线 l 的曲线积分, 记为 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$, 即

$$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{a}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{l}_i. \tag{4.34}$$

有向曲线 l 称为它的积分路径. 这种曲线积分也称为第二类曲线积分.

若 l^+ 和 l^- 分别表示同一曲线弧 l 由于定向取得不同而形成的不同的有向曲线, 则显然应有

$$\int_{l^-} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{l^-} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}. \qquad (4.35)$$

下面讨论曲线积分的计算. 设向量场

$$\boldsymbol{a}(x, y, z)=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

以 A 为起点, B 为终点的有向曲线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (t: \alpha\to\beta) \\ z=z(t), \end{cases}$$

或用向量函数表示为

$$\boldsymbol{l}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

并设点 A 和点 B 的坐标分别为 $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ 和 $(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 因此 $d\boldsymbol{l}$ 就可以写成为:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{l} &= dx\,\boldsymbol{i}+dy\,\boldsymbol{j}+dz\,\boldsymbol{k} \\ &= x'(t)dt\,\boldsymbol{i}+y'(t)dt\,\boldsymbol{j}+z'(t)dt\,\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} &= a_x dx+a_y dy+a_z dz \\ &= [a_x x'(t)+a_y y'(t)+a_z z'(t)]dt. \end{aligned}$$

于是曲线积分 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 就可化成下列定积分:

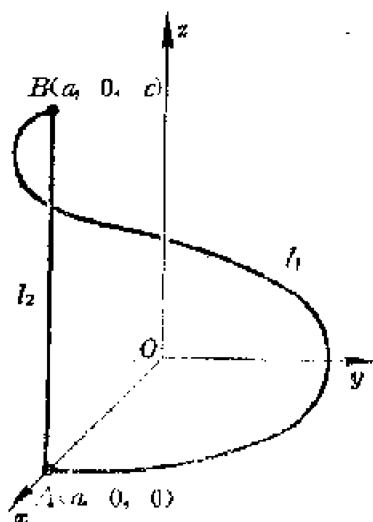


图 4.14

$$\begin{aligned} &\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} \\ &= \int_l a_x dx+a_y dy+a_z dz \\ &= \int_\alpha^\beta [a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) \\ &\quad + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt. \end{aligned} \qquad (4.36)$$

例 1 向量场 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$, l_1, l_2 为图 4.14 中两条自点 $A(a, 0, 0)$ 到点 $B(a, 0, c)$ 的有向曲线, 它们的参数方程分别为:

l_1: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$,

$$z=\frac{c}{2\pi}t \quad (t: 0\to 2\pi);$$

l_2: $x=a,\ y=0,$

$$z=t \quad (t: 0\to c).$$

试求曲线积分$\int_{l_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$和$\int_{l_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$.

解 从式(4.36),有

$$\begin{aligned}\int_{l_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}&=\int_{l_1}y\,dx-x\,dy+(x+y+z)dz\\&=\int_0^{2\pi}\Big[-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t\\&\quad+\Big(a\cos t+a\sin t+\frac{c}{2\pi}t\Big)\frac{c}{2\pi}\Big)\Big]dt\\&=\int_0^{2\pi}\Big[-a^2+\frac{ac}{2\pi}\cos t+\frac{ac}{2\pi}\sin t+\frac{c^2}{4\pi^2}t\Big]dt\\&=\frac{c^2}{2}-2\pi a^2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{l_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}&=\int_{l_2}y\,dx-x\,dy+(x+y+z)dz\\&=\int_0^c(a+0+t)\,dt=\frac{c^2}{2}+ac.\end{aligned}$$

由此可见,在一般情况下曲线积分$\int_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$不仅与有向曲线$l$的起点、终点位置有关,而且与积分路径$l$本身也有关.

2. 曲线积分的另一定义形式

类似于曲面积分,曲线积分也可以从数量场的角度给出定义.下面我们介绍这种定义.

设l为一条逐段光滑的自点A到点B的有向曲线,而$P(x, y, z)$为定义在l上的有界函数.在l上从点A顺次插入$n-1$个分点$M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$,把点A看作M_0,把点B看作M_n,这样就把l分成n段有向曲线$\Delta l_0, \Delta l_1, \cdots, \Delta l_{n-1}$,其中$\Delta l_i$的起点为$M_i(x_i, y_i, z_i)$,终点为$M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$.在每段Δl_i上任取一点$\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ $(i=0, 1, \cdots,$

$n-1$)．令

$$\Delta \boldsymbol{l}_i=\overrightarrow{M_iM_{i+1}},\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i,$$

$$\lambda=\max\{|\Delta \boldsymbol{l}_i|\,|\,i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\}.$$

如果下列极限存在：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)\Delta x_i,$$

且与 Δl_i 的分法以及 $\bar{M}_i(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)$ 的取法无关，则称此极限为 $P(x,\ y,\ z)$ 沿有向曲线 l 的曲线积分，记为 $\int_l P(x,\ y,\ z)dx$，

即 $$\int_l P(x,\ y,\ z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}P(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)\Delta x_i. \tag{4.37}$$

同样可定义曲线积分：

$$\int_l Q(x,\ y,\ z)dy \quad 和 \quad \int_l R(x,\ y,\ z)dz.$$

易知，如果

$$\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)=P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k},$$

则

$$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_l P(x,\ y,\ z)dx+Q(x,\ y,\ z)dy+R(x,\ y,\ z)dz. \tag{4.38}$$

曲线积分 $\int_l P(x,\ y,\ z)dx$ 的计算，主要通过曲线 l 的参数方程把它化成一个定积分．定积分的上限、下限的安排应与 l 的定向一致，即下限对应于 l 的起点，上限对应于 l 的终点．

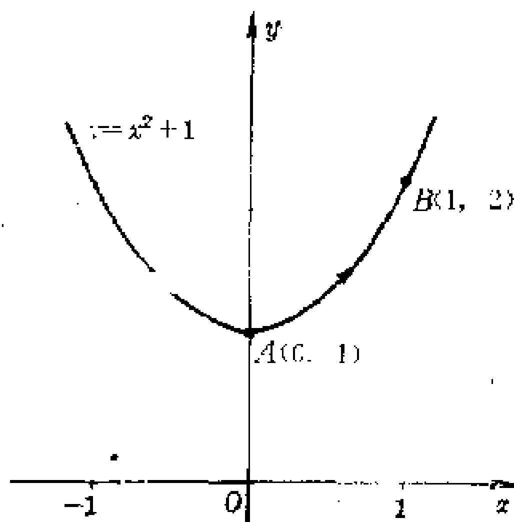


图 4.15

例 2　计算曲线积分 $\int_l (6xy^2-y^3)dx$，其中 l 为抛物线 $y=x^2+1$ 上从点 $A(0,\ 1)$ 到点 $B(1,\ 2)$ 的一段弧（见图 4.15）．

解　l 为 xOy 平面上的一条平面有向曲线．把 l 的曲线方程 $y=x^2+1$ 看成参数方程 $x=t$，y

$=t^2+1$. 代入曲线积分式中，便可化成下列定积分：

$$\int_l (6xy^2-y^3)dx=\int_0^1 [6t(t^2+1)^2-(t^2+1)^3]dt$$

$$=\int_0^1 [6t^5+12t^3+6t-t^6-3t^4-3t^2-1]dt=\frac{149}{35}.$$

3. 沿平面有向闭曲线的曲线积分

对于平面上任一条闭曲线而言，曲线上任一点既可看作起点，又可看作终点. 为了给这种闭曲线 l 规定方向，我们作下列规定. 设区域 D 为闭曲线 l 所围成的区域，当"一个人"沿 l"行走"时区域 D 总位于"他"的左侧，那么"他"的走向即定为 l 的正向（见图 4.16）. 在不加说明的情况下，平面有向闭曲线的定向均指它的正向.

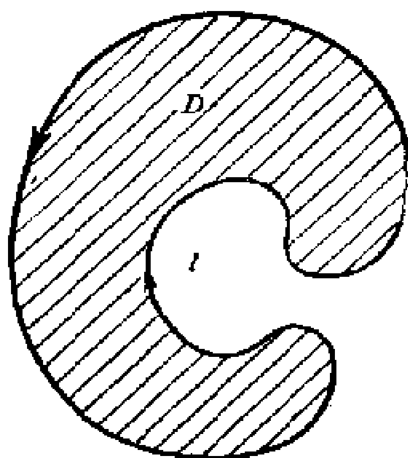


图 4.16

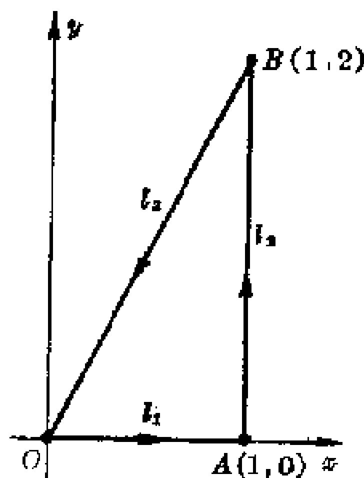


图 4.17

例 3 设向量场 $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$，有向闭曲线 l 为图 4.17 中三角形的周边 $OABO$. 试求曲线积分 $\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$.

解 如图 4.17，把 l 看成由 l_1, l_2, l_3 三条有向直线所组成. 它们的参数方程可分别为：

l_1: $x=t,\ y=0(t:\ 0\to1)$;

l_2: $x=1,\ y=t(t:\ 0\to2)$;

l_3: $x=t,\ y=2t(t:\ 1\to0)$.

因此得到如下的三个曲线积分：

$$\int_{l_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_1} -y\,dx+x\,dy=\int_0^1 0\cdot dt=0;$$

$$\int_{l_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_2} -y\,dx+x\,dy=\int_0^2 (0+1)\,dt=2;$$

$$\int_{l_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_3} -y\,dx+x\,dy=\int_1^0 (-2t+2t)\,dt=0.$$

于是曲线积分

$$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=2.$$

例 4　设有向闭曲线 l 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为正向．试求曲线积分 $\oint_l \frac{-x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$．

解　l 的参数方程可写成：

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t\ (t:\ 0\to 2\pi).$$

于是曲线积分

$$\oint_l \frac{-x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{a^2\cos t\sin t+a^2\sin t\cos t}{a^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt=0.$$

4．旋度

在给出旋度的定义之前，我们先对空间闭曲线 l 的定向作如下的规定：设 l 为空间中一个光滑的有向曲面 S 的边界，而当"一个人"在有向曲面 S 的正侧上沿 l"行走"时有向曲面 S 所相应的曲面区域 D 总位于"他"的左侧，那么"他行走"的方向即为关于 S 的正向(见图 4.18)．在不另加说明时，这种有向曲面 S 的边界 l 的定向均指它关于 S 的正向．

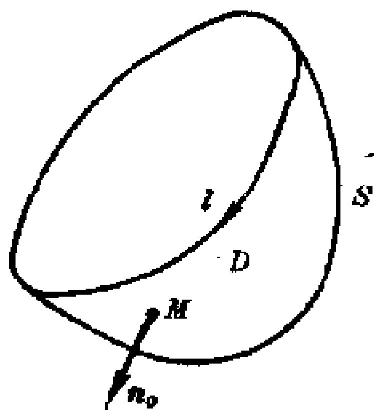


图　4.18

定义 4.5　设 $\boldsymbol{a}$ 为一个向量场，S 为通过点 $M(x,y,z)$ 的有界、光滑的有向曲面，$\boldsymbol{a}$ 在 S 上有定义，l 为 S 的边界组成的有向闭曲线，$\boldsymbol{n}_0$ 为 S 在点 M 处的单位法向

量，d 为 S 的直径．$d\to 0$ 是指在保持点 M 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 始终不变的条件下曲面 S 收缩到点 M 的过程．同时也用 S 表示曲面 S 的面积．若极限

$$\lim_{d\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{S}$$

存在，且与有向曲面 S 的具体取法无关，则称此极限为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处的旋度(此旋度记为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M$，它是一个向量)在 $\boldsymbol{n}_0$ 方向上的投影，即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M\cdot\boldsymbol{n}_0=\lim_{d\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{S}. \tag{4.39}$$

根据这个定义，如果取 $\boldsymbol{n}_0$ 为坐标向量 $\boldsymbol{i}$，则从式(4.39)就可以得到向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M$ 的第一个坐标，同样可以获得向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M$ 的其它两个坐标．这样，向量 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M$ 就可以完全确定了．下面我们通过例子来给出旋度的物理解释．

例 5 *磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的旋度*．设已知由某种稳恒电流(即电流的大小和方向都不随时间变化)所形成的磁场的磁场强度 $\boldsymbol{H}$．那么这种稳恒电流应如何描述，又如何通过向量场 $\boldsymbol{H}$ 来描述它呢？在上一节的例 5 中我们用流体的流速场描述空间的流体运动．电流就是电荷运动，所以很自然采用一个描述空间电荷运动速度分布的向量场来描述这种稳恒电流．下面我们将讨论如何通过向量场 $\boldsymbol{H}$ 来刻画这种稳恒电流所相应的电荷运动速度场．

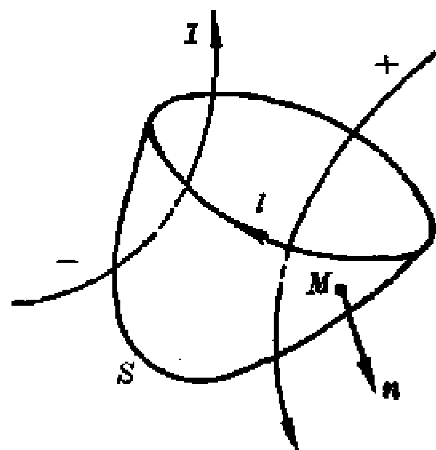


图 4.19

根据安培(Ampère)环路定律可知，稳恒电流所产生的磁场的磁场强度与电流 I 之间的关系为

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum I,$$

其中 l 为空间中一个光滑的有向曲面 S 的边界，它是一个有向闭曲线(见图 4.19)．曲线积分 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$

称为向量场 $\boldsymbol{H}$ 沿有向闭曲线 l 的环量. $\sum I$ 即为穿过有向曲面 S 的电流的代数和，由 S 的负侧穿向正侧的电流为正，反之为负. 因为 $\sum I$ 实际上是有向曲面 S 上各点处电荷运动情况的一种"综合"，所以环量 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$ 也是如此.

设点 $M(x, y, z)$ 为有向曲面 S 上的一点，而曲面的面积也用 S 表示，用 d 表示有向曲面 S 的直径. 当通过点 M 的光滑有向曲面 S，在保持点 M 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向始终不变的条件下收缩到点 M，则曲面 S 将趋向一个以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的有向平面. 易知这时极限 $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}}{S}$ 便是点 M 处电荷运动速度向量在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影. 换句话说，旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$ 便刻画了这种稳定电流所相应的电荷运动速度场.

5. 斯托克斯公式

定理 4.8［斯托克斯(Stokes)］　设 S 为分片光滑的有向曲面，它的边界曲线 l 为分段光滑的有向闭曲线，向量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 的分量 a_x, a_y, a_z 在 S 及 l 上都具有各种一阶连续偏导数，则

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{4.40}$$

定理的证明将在本章§5中给出.

为了记忆方便，可把向量

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

写成下列行列式形式：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \qquad (4.41)$$

例 6 设向量场 $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$，有向曲面 S 为八分之一球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$$

的外侧(见图 4.20)．试对于给定的 $\boldsymbol{a}$ 和 S 验证斯托克斯公式［即公式(4.40)］成立．

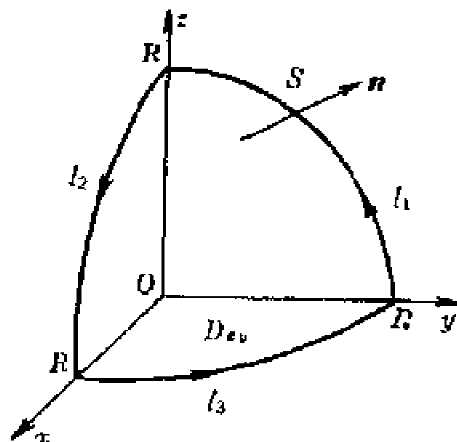


图 4.20

解 因为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

而曲面 S 在 xOy 坐标面上的投影区域 D_{xy} 为四分之一圆：

$$x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

由式(4.21)，并注意到曲面积分的对称性，式(4.40)的左端为

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=3\iint_{D_{xy}} -\,dx\,dy = -\frac{3}{4}\pi R^2.$$

又根据对称性(参看图 4.20)，可知式(4.40)的右端

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{l_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{l_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = 3\int_{l_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l},$$

其中有向曲线 l_1 的参数方程可写成下列形式：

$$\begin{cases} x=0, \\ y=R\cos t, \quad \left(t:\ 0\to\frac{\pi}{2}\right) \\ z=R\sin t. \end{cases}$$

于是便得式(4.40)的右端为

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=3\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-R^2\sin^2 t)dt$$

$$=\left(\frac{3}{4}\ R^2\sin 2t-\frac{3}{2}\ R^2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3}{4}\pi R^2.$$

故对于给定的 $\boldsymbol{a}$ 和 S，斯托克斯公式成立.

下面我们利用斯托克斯公式给出向量场

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

的旋度 $\text{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系内的形式，以便进行计算. 设 a_x、a_y、a_z 的各种一阶偏导数均存在且连续. 现特别取 S 为包含点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的一块小的有向平面，且 S 在点 M 处的法向量的方向与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 的方向一致. 于是公式(4.40)左端的曲面积分就可化成下列二重积分：

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{4.42}$$

其中 D_{xy} 为 S 在 xOy 坐标面上的投影区域. 因为平面 S 与坐标面 xOy 是平行的，因而区域 D_{xy} 的面积也就是 S 的面积，并用 S 表示. 此外 S 上每点的坐标均具有(x, y, z_0)的形式. 所以式(4.42)右端的偏导数 $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ 都只是变量 x、y 的函数，而 z 的取值均为 z_0.

利用重积分的中值定理可将式(4.42)右端的二重积分进一步化成下列形式：

$$\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\Big|_{M'}\cdot S, \quad (4.43)$$

其中 M' 为 S 上的某一点. 于是由式(4.40)、(4.42)和(4.43), 便得

$$\frac{\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{S}=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\Big|_{M'}$$

其中有向闭曲线 l 为有向平面 S 的边界. 现考察上式在有向平面 S 的直径 $d\to 0$ 时的极限, 这时根据旋度的定义, 上式左端的极限即为 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|_M\cdot\boldsymbol{k}$; 而上式右端的极限, 从连续性便知为 $\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\Big|_M$. 这样便得到下面结果:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|_M\cdot\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\Big|_M.$$

应用类似方法同样可得下列结果:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|_M\cdot\boldsymbol{j}=\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\Big|_M$$

和

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|_M\cdot\boldsymbol{i}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\Big|_M.$$

于是便得旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系内的形式如下:

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}. \quad (4.44)$$

由此还可以把斯托克斯公式[式(4.40)]改写成下列形式:

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}. \quad (4.45)$$

例 7 已知向量场 $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}-zy\boldsymbol{k}$, 试求在点 $M(1,0,-1)$ 处的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}|_M$.

解 由式(4.44), 得

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & y^2 & -zy\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(-zy)-\frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz)-\frac{\partial}{\partial x}(-zy)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=-z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

因此
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|_M=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}.$$

例 8 已知数量场 $\varphi(x, y, z)=xy+yz+zx$，试求梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 的旋度 $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

解 因为

$$\operatorname{grad}\varphi=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}.$$

于是由式(4.44)便得

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z+x & x+y\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(z+x)\right]\boldsymbol{i}$$

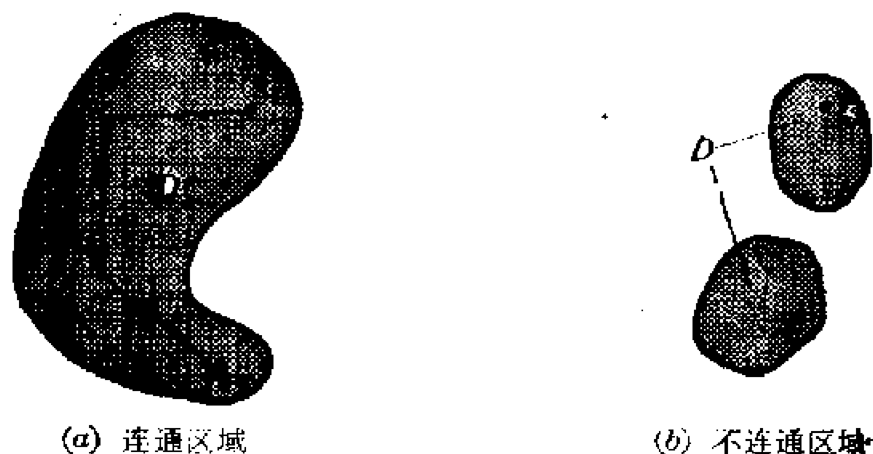
$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}(y+z)-\frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right]\boldsymbol{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}(z+x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{0}.$$

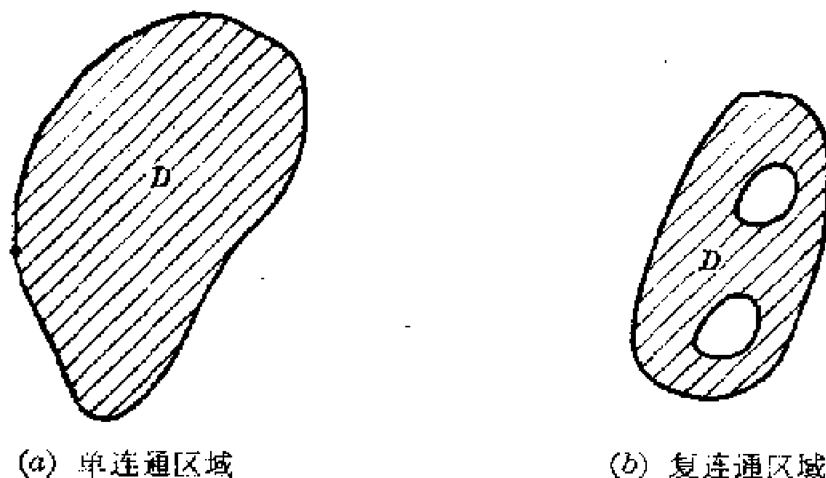
6. 保守场

在给出保守场的定义之前，我们先介绍连通区域的概念. 设 D 为 R^2 空间的一个点集，且 D 内任意两点都可以用全由 D 的内点组成的折线连接起来，则称 D 为一个平面连通区域；否则称为不连通区域（参看图 4.21）. 如果 D 为一个平面连通区域，且 D 内任一条闭曲线都可以不经过非 D 中的点而连续地收缩为一点，



(a) 连通区域　　(b) 不连通区域

图 4.21



(a) 单连通区域　　(b) 复连通区域

图 4.22

则称 D 为一个平面单连通区域；否则称为平面复连通区域（参看图4.22）. 简单地说，单连通区域就是不含有"洞"的连通区域. 在 R^3 空间也可类似地建立连通区域和单连通区域的概念.

下面我们将给出保守场的定义，并对它的性质进行讨论. 若向量场 $\boldsymbol{a}$ 在区域 D 上有定义，且沿 D 内任一条分段光滑的有向闭曲线 l 的曲线积分恒为零，即

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0, \tag{4.46}$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 为区域 D 上的保守场.

设 D 为一个连通区域，$\boldsymbol{a}$ 为在 D 上有定义的向量场，M、N 为 D 内任意两点，l_1、l_2 为 D 内自点 N 到点 M 的任意两条分段光滑的有向曲线. 如果曲线积分

$$\int_{l_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{4.47}$$

恒成立，则称向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 D 内的曲线积分与积分路径无关（曲线积分的数值只依赖于有向曲线的起点和终点）. 在力学上，我们知道质点在保守力场（例如重力场）中移动时，力场所做的功与质点所走的路径无关，而只与质点运动的起点和终点有关. 质点运动时力场所作的功可用曲线积分来表示，故这种曲线积分与积分路径无关.

性质 1 设 D 为一个单连通区域，$\boldsymbol{a}$ 为在 D 上有定义的向量场，则 $\boldsymbol{a}$ 为 D 上保守场的充要条件为：$\boldsymbol{a}$ 在 D 内的曲线积分与积分路径无关.

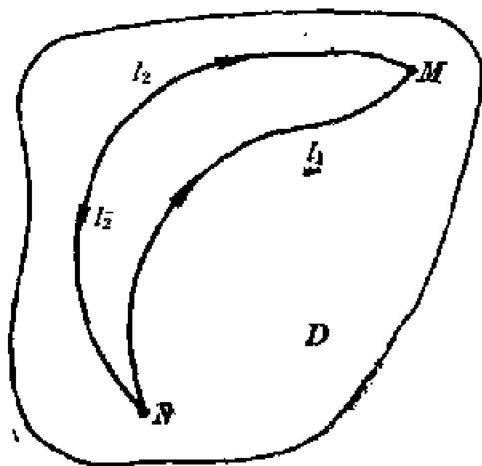


图 4.23

证明 先证必要性：设 $\boldsymbol{a}$ 为 D 内的保守场，M、N 为 D 内任意两点，l_1、l_2 为 D 内自点 N 到点 M 的任意两条逐段光滑的有向曲线（不妨设 l_1 与 l_2 是不相同的）. 用 l_2^- 表示一条有向曲线，它的轨迹与 l_2 一致，但方向是从点 M 到点 N，因而 l_1 和 l_2^- 组成 D 内一条逐段光滑的有向闭曲线 l（见图 4.23）. 因为 $\boldsymbol{a}$ 为 D 上的保守场，因而有

$$\int_{l_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{l_2^-} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{l} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

由此便得

$$\int_{l_1} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{l_2^-} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l_2} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

这说明 $\boldsymbol{a}$ 在 D 内的曲线积分与积分路径无关.

再证充分性：设 $\boldsymbol{a}$ 在 D 内的曲线积分与积分路径无关. l 为 D 内任一条分段光滑的有向闭曲线. 在 l 上取两个不同的点 M 和 N. 这时，有向闭曲线 l 就可以看成是由两条分段光滑的有向曲线 l_1 和 l_2^- 所合成：l_1 是从点 N 到点 M，l_2^- 是从点 M 到点 N（l_2^- 的轨迹与 l_1 的不相同），l_2 则表示与 l_2^- 曲线轨迹相同但方向相反

的有向曲线．于是根据积分与路径无关的条件，便得

$$\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

由此进一步得到

$$\oint_{l}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_2^-}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0.$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 为 D 上的保守场．】

若向量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 在区域 D 上有定义，且在 D 上 a_x、a_y、a_z 的各个一阶偏导数都存在且连续，旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在 D 内任一点处都存在且恒为零向量，即

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{0}, \tag{4.48}$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 为 D 上的*无旋场*．由斯托克斯公式就可以得到下列结论：

性质 2 D 为一个单连通区域，向量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 在 D 上有定义，且在 D 上 a_x、a_y、a_z 的各种一阶偏导数都存在且连续，旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 在 D 内任一点处也都存在，则 $\boldsymbol{a}$ 是 D 上保守场的充要条件为 $\boldsymbol{a}$ 是 D 上的无旋场．

设 $\boldsymbol{a}$ 为在区域 D 上有定义的向量场，φ 为在 D 上有定义的数量场，且 φ 的各种一阶偏导数在 D 上都存在．如果在 D 上下列关系式恒成立：

$$\boldsymbol{a}\equiv\mathrm{grad}\,\varphi, \tag{4.49}$$

则称 φ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 D 上的一个*势函数*．按照定义易知，若 φ 为 $\boldsymbol{a}$ 的一个势函数，则 $\varphi+C$(其中 C 为一个任意常数)也必为 $\boldsymbol{a}$ 的一个势函数．

性质 3 设 D 为一个单连通区域，$\boldsymbol{a}$ 为 D 上的一个保守场，且 $\boldsymbol{a}$ 的分量 a_x、a_y、a_z 在 D 上都连续，则 $\boldsymbol{a}$ 在 D 上的势函数 φ 必存在．

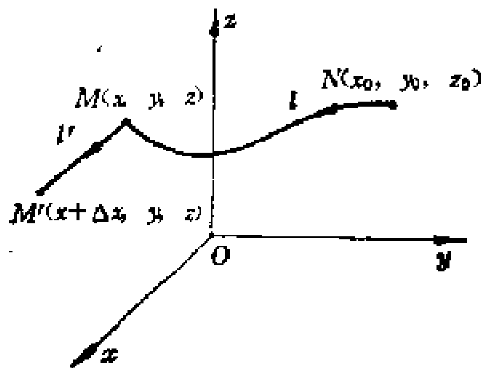


图 4.24

证明 在 D 内取定一点 $N(x_0, y_0, z_0)$．由于 D 是一个单连通区域，因而对于 D 内任一点 $M(x, y, z)$ 都存在 D 内一条从 N 到 M 的逐段光滑的有向曲线 l．由性质

1 可知，曲线积分$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$的值完全取决于点$M(x, y, z)$，因而它是在$D$上有定义的$(x, y, z)$的函数$\varphi(x, y, z)$，即

$$\varphi(x, y, z)=\int_N^{(x, y, z)} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{4.50}$$

下面证明φ即为$\boldsymbol{a}$的一个势函数.

设点$M'(x+\Delta x, y, z)$也为D内的一点，l'为自点M到点M'的有向直线（见图 4.24）. 当$|\Delta x|$很小时，可使l'全部落入D内. 因而就有

$$\varphi(x+\Delta x, y, z)-\varphi(x, y, z)=\int_{l'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

显然，在直线l'上，

$$d\boldsymbol{l}=dx\,\boldsymbol{i},$$

于是曲线积分$\int_{l'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$就可化成下列定积分：

$$\int_{l'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_x^{x+\Delta x} a_x\,dx.$$

利用中值定理进一步可得

$$\int_{l'} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=a_x(\xi, y, z)\,\Delta x,$$

其中ξ是在x和$x+\Delta x$之间的某个值. 由a_x的连续性便有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x, y, z)-\varphi(x, y, z)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0} a_x(\xi, y, z)=a_x(x, y, z).\end{aligned}$$

应用类似方法还可得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=a_y(x, y, z),$$

和

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=a_z(x, y, z).$$

由此便知

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\varphi,$$

即φ为$\boldsymbol{a}$的一个势函数. ∎

性质 4　设D为一个单连通区域，在D上函数$\varphi(x, y, z)$的各种二阶偏导数都存在且连续，则$\operatorname{grad}\varphi$一定是$D$上的一个

保守场.

证明 首先, $\mathrm{grad}\,\varphi$ 为 D 上的一个无旋场,因为

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\end{vmatrix}$$

$$=(\varphi_{zy}-\varphi_{yz})\boldsymbol{i}+(\varphi_{xz}-\varphi_{zx})\boldsymbol{j}+(\varphi_{yx}-\varphi_{xy})\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

根据性质 2, 便知 $\mathrm{grad}\,\varphi$ 为 D 上的一个保守场. ▌

§5 平面向量场

1. 格林公式

对于向量场 $\boldsymbol{a}$, 若能选取适当的直角坐标系$\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$, 使得 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 方向上的投影 $a_z=0$, 且 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 方向上的投影 a_x 和 a_y 仅为$(x,\ y)$的函数而与 z 无关, 即这时 $\boldsymbol{a}$ 可写成下列形式

$$\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y)\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y)\boldsymbol{j}, \tag{4.51}$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 为一个平面向量场. 显然对于上述平面向量场 $\boldsymbol{a}$, 只要了解它在 xOy 坐标面上的情况就足够了.

若具有式(4.51)形式的平面向量场 $\boldsymbol{a}$ 的分量 a_x、a_y 都具有各种一阶连续偏导数,则易知它的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ 具有如下形式:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{4.52}$$

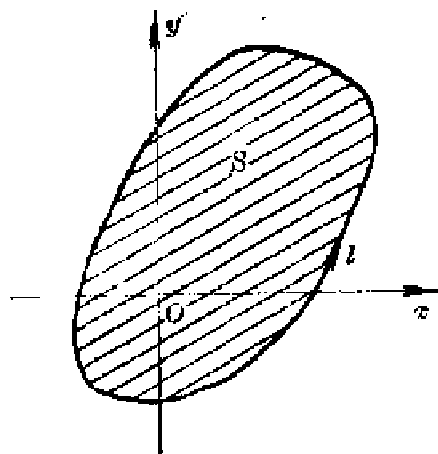


图 4.25

下面我们考察这种平面向量场 $\boldsymbol{a}$ 的斯托克斯公式的形式. 若有向曲面 S 为 xOy 坐标面上的一个单连通区域, 它的法向量的方向与坐标向量 $\boldsymbol{k}$ 一致. 这时 S 的边界曲线为 xOy 坐标面上的一条有向闭曲线 l (见图 4.25). 于是有

$$d\boldsymbol{S}=dS\,\boldsymbol{k}.$$

这样斯托克斯公式中的曲面积分 $\iint_S \text{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 可写成如下的形式:

$$\iint_S \text{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

而曲线积分 $\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 就可写成下列形式:

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy.$$

因此对于平面向量场 $\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y)\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y)\boldsymbol{j}$, 斯托克斯公式就可写成下列格林(Green)公式的形式:

$$\iint_S\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy. \qquad (4.53)$$

下面我们将先给出格林公式的证明, 然后再利用它来证明斯托克斯公式.

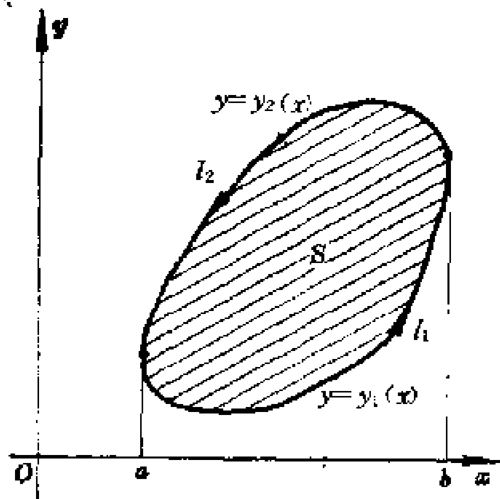


图　4.26

定理 4.4(格林)　设 S 为 xOy 坐标面上的一个平面单连通区域, 它的边界曲线为 xOy 坐标面上的分段光滑的有向闭曲线 l, $\boldsymbol{a}=a_x(x,\ y)\boldsymbol{i}+a_y(x,\ y)\boldsymbol{j}$ 为在 S 上有定义的平面向量场, 且它的分量 a_x 和 a_y 在 S 及 l 上各种一阶偏导数都存在且连续, 则式(4.53)必成立.

证明　首先假设单连通区域 S 既是关于 x 的简单区域, 又是关于 y 的简单区域. 故 S 可以表示成下列形式:

$$S:\ a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x).$$

于是有

$$\iint_S \frac{\partial a_x}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial a_x}{\partial y}\,dy$$

$$=\int_a^b [a_x(x, y_2(x)) - a_x(x, y_1(x))] dx$$

$$= -\int_{l_1} a_x dx - \int_{l_2} a_x dx,$$

其中 l_1、l_2 分别是对应于 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 的有向曲线（见图 4.26）. 同样可以得到

$$\iint_S \frac{\partial a_y}{\partial x} dx\,dy = \int_{l_1} a_y dy + \int_{l_2} a_y dy.$$

故

$$\iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{l_1} a_x dx + a_y dy + \int_{l_2} a_x dx + a_y dy$$

$$= \oint_l a_x dx + a_y dy.$$

因此这时式 (4.53) 成立.

如果 S 并非既是关于 x 的简单区域、又是关于 y 的简单区域，则可引进几条辅助曲线把区域 S 分成有限个小区域，使得每个小区域都既是关于 x 的简单区域，又是关于 y 的简单区域(参看图 4.27). 因而对每个小区域及其边界曲线而言，式 (4.53) 都成立. 区域 S 上的二重积分 $\iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy$ 就是这些小区域上二重积分之和.另一方面,注意到在沿各个小区域的边界曲线的曲线积分中,辅助曲线上的曲线积分要沿两个相反方向各求一次，正好抵消.所以把沿各个小区域边界曲线的曲线积分相加，就是曲线积分 $\oint_l a_x dx + a_y dy$. 因此对于这种区域 S，式 (4.53) 仍然成立. ❚

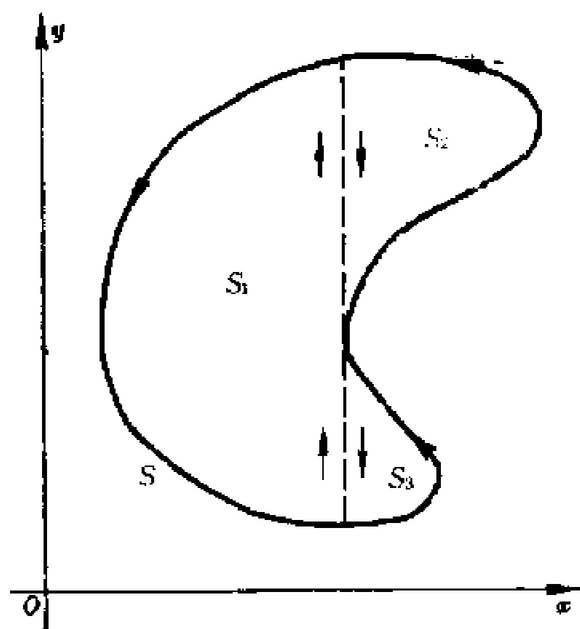


图 4.27

例 1 利用格林公式计算二重积分$\iint\limits_S xy\,dx\,dy$，其中积分区域$S$为$\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$.

解 取$a_x\equiv 0$, $a_y=\dfrac{1}{2}x^2y$. 于是

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=xy.$$

易知S的边界为一单位圆，它相应的有向闭曲线l可用下列参数方程表示：

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}\quad (t:\ 0\to 2\pi)$$

故应用格林公式得：

$$\iint\limits_S xy\,dx\,dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\oint_l a_x dx+a_y dy=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos^3 t\sin t\,dt=0.$$

例 2 设$P(x, y)$、$Q(x, y)$和$R(x, y)$都是平面区域S上具有各种一阶连续偏导数的二元函数，S的边界曲线l是分段光滑的闭曲线，试证明：

$$\iint\limits_S\left(P\frac{\partial R}{\partial x}+Q\frac{\partial R}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\oint_l PR\,dy-QR\,dx-\iint\limits_S R\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (4.54)$$

证明 令

$$a_x=-QR,\ a_y=PR.$$

于是

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=R\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=-R\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial R}{\partial y}.$$

应用格林公式便得：

$$\oint_l PR\,dy - QR\,dx = \oint_l a_x\,dx + a_y\,dy$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_S \left[\left(P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y}\right) + \left(R\frac{\partial P}{\partial x} + R\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_S \left(P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint_S \left(R\frac{\partial P}{\partial x} + R\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

移项后就得式(4.54).

2. 斯托克斯公式的证明

下面给出定理4.3的证明.

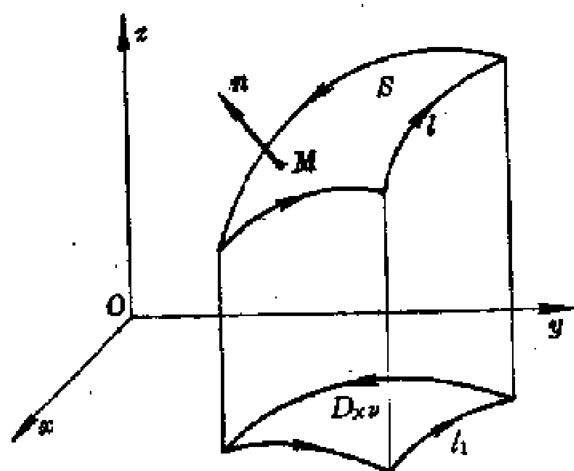


图 4.28

证明 首先假设S是一个光滑的有向曲面，而且任一平行于坐标向量的直线与S至多有一个交点. 设曲面S在xOy坐标面上的投影区域为D_{xy}. 还不妨设S上任一点M处的法向量$\boldsymbol{n}$与坐标向量$\boldsymbol{k}$的夹角γ均为锐角(见图4.28). 设曲面S的方程为$z=f(x, y)$. 于是S上任一点$M(x, y, z)$处的法向量

$$\boldsymbol{n} = -f_x\boldsymbol{i} - f_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

故$d\boldsymbol{S}$的三个方向余弦分别为

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \end{cases} \tag{4.55}$$

若令$|d\boldsymbol{S}| = dS$, 则有

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha\, dS+\iint_S \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta\, dS+\iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\, dS. \tag{4.56}$$

应用 S 的曲面方程 $z=f(x, y)$，可得

$$\oint_l a_x(x, y, z)dx=\oint_{l_1} a_x(x, y, f(x, y))dx,$$

其中有向闭曲线 l 为有向曲面 S 的边界曲线，而有向闭曲线 l_1 为 D_{xy} 的边界曲线．应用格林公式可进一步得到：

$$\begin{aligned}\oint_l a_x(x, y, z)dx&=\oint_{l_1} a_x(x, y, f(x, y))dx\\&=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}a_x(x, y, f(x, y))dx\,dy\\&=-\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial a_x}{\partial y}+\frac{\partial a_x}{\partial z}f_y\right]dx\,dy.\end{aligned} \tag{4.57}$$

注意到下述关系式：

$$dx\,dy=\cos\gamma\, dS,$$

由式(4.57)和(4.55)，便得：

$$\oint_l a_x(x, y, z)dx=\iint_S\left[\frac{\partial a_x}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial a_x}{\partial y}\cos\gamma\right]dS.$$

同样可以得到：

$$\oint_l a_y(x, y, z)dy=\iint_S\left[\frac{\partial a_y}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial a_y}{\partial z}\cos\alpha\right]dS$$

和

$$\oint_l a_z(x, y, z)dz=\iint_S\left[\frac{\partial a_z}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial a_z}{\partial x}\cos\beta\right]dS.$$

将上面三式相加，并注意到式(4.56)，就可以得到斯托克斯公式(4.40)．

如果有向曲面 S 不满足证明开始时所假设的条件，则可将 S 分割成有限块满足条件的小有向曲面，如图 4.29 所示. 在每一小块有向曲面上斯托克斯公式都成立. 另一方面，注意到沿各个小有向曲面的边界曲线的曲线积分中，在那些小曲面的交界线上的曲线积分要沿两个相反方向各求一次而相互抵消，故而在 S 上斯托克斯公式也成立. ▌

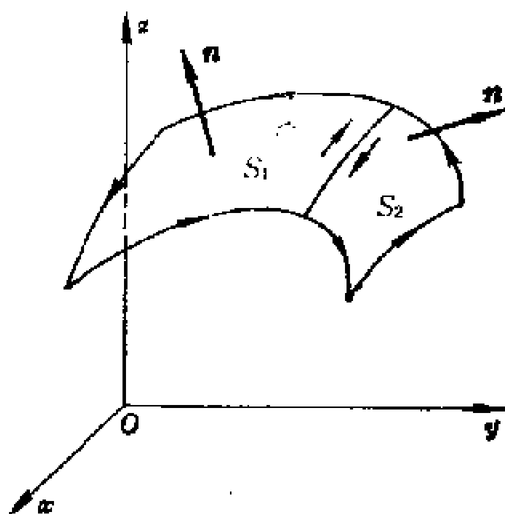


图 4.29

3. 平面保守场

如果平面向量场 $\boldsymbol{a}=a_x(x, y)\boldsymbol{i}+a_y(x, y)\boldsymbol{j}$ 的分量 $a_x(x, y)$ 和 $a_y(x, y)$ 都具有各种一阶连续偏导数，由式(4.52)和上节所讨论的保守场的性质 2 可知，在平面单连通区域 D 内，$\boldsymbol{a}$ 为保守场的充要条件为：在 D 内有

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\equiv 0. \tag{4.58}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=(2x+\sin y)\boldsymbol{i}+x\cos y\boldsymbol{j}$，有向曲线 l 为 xOy 坐标面上平面曲线 $y=x^2$ 中自原点到点 $M(2, 4)$ 的部分. 试求曲线积分 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$.

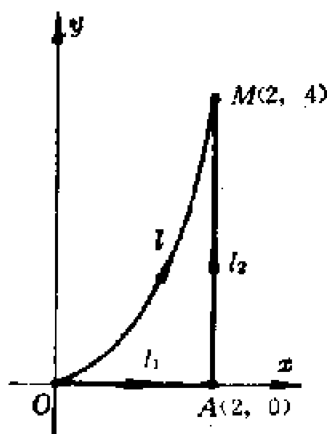


图 4.30

解 因为

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=\cos y, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x}=\cos y.$$

故 $\boldsymbol{a}$ 为一个平面保守场. 因此曲线积分 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 与积分路径无关，而只取决于有向曲线 l 的起点和终点的位置. 因此，我们可以另取一条从 O 到 M 而对计算更为方便的路径. 现取如图 4.30 所示的 l_1 和 l_2 组成的路径. l_1 的参数方程可写成为

$$x=t,\ y=0,\ t:\ 0\to 2.$$

l_2 的参数方程可写成为

$$x=2,\ y=t,\ t:\ 0\to 4.$$

于是有

$$\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\int_0^2 2t\,dt+\int_0^4 2\cos t\,dt=4+2\sin 4.$$

例 4 试求上例中平面保守场 $\boldsymbol{a}$ 的一个势函数 $\varphi(x, y)$.

解 取原点 O 为参考点，即令 $\varphi(0, 0)=0$. 现把图 4.30 中点 M 的坐标作为 (x, y)，点 A 的坐标为 $(x, 0)$. 于是得到 $\boldsymbol{a}$ 的一个势函数

$$\varphi(x, y)=\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}\quad (l\ \text{为任一条从}\ O\ \text{到}\ M\ \text{的有向曲线})$$

$$=\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\int_0^x 2t\,dt+\int_0^y x\cos t\,dt=x^2+x\sin y.$$

例 5 设 $\boldsymbol{a}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$，$l$ 为坐标面 xOy 上任一条包含原点在其内的光滑的有向闭曲线. 试求曲线积分 $\oint_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$.

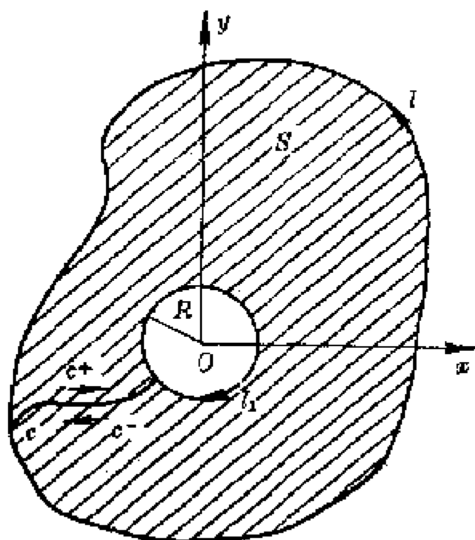


图 4.31

解 因为

$$a_x=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad a_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

在点 $(0, 0)$ 处无定义. 所以不能直接利用格林公式. 因此先要从以 l 为边界曲线的区域内挖去点 $(0, 0)$. 为此，取一个充分小的正数 R，使得在 xOy 坐标面上包含点 $(0, 0)$ 的圆形区域 $\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 全部处在以 l 为边界的区域内. 从以 l 为边界曲线的区域内挖去上述圆形区域后，所剩的区域不再是一个单连通区域了，故还不能对

它应用格林公式．因而再要作一次“剪开手术”：用一条光滑曲线 c 把 l 和圆周 l_1：$x^2+y^2=R^2$ 连接起来(见图 4.31)．这样由 l、l_1、c 所围成的连通区域 S 就是一个单连通区域了，其边界曲线为有向闭曲线 l'．从图 4.31 可知，按照 l' 的正向规定，有

$$l'=l+c^++l_1+c^-,$$

其中 c^+、c^- 是由曲线 c 取相反定向所得的两条有向曲线，l 和 l_1 的定向见图 4.31．

由于在单连通区域 S 上

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\equiv 0.$$

故由格林公式可知 $\oint_{l'}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0$．又因为

$$\int_{c^+}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{c^-}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0,$$

故

$$\oint_{l'}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{c^+}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{c^-}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\int_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=0.$$

于是有

$$\int_l\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{l_1}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_{2\pi}^{0}\frac{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}{R^2}dt=2\pi.$$

上例说明，平面向量场 $\boldsymbol{a}$ 在复连通区域 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2>0\}$ 中是一个无旋场，但它并不是一个保守场．因此在复连通区域内无旋场不一定是保守场．

§6* 向量分析

1．∇ 算子和 Δ 算子

为了便于记忆和运算，我们引入哈密顿(Hamilton)算子，它在直角坐标系内的形式如下：

$$\nabla=\boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.59}$$

算子 ∇(读作 nabla 或 del)可以看作是以微分算符 $\frac{\partial}{\partial x}$、$\frac{\partial}{\partial y}$、$\frac{\partial}{\partial z}$ 为分量的形式向量.

设数量场 $\varphi(x, y, z)$ 和向量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 的各分量 $a_x(x, y, z)$、$a_y(x, y, z)$、$a_z(x, y, z)$ 都具有各种一阶连续偏导数, 那么, 利用 ∇ 算子并借助向量运算, 我们可以得到下列结果:

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\operatorname{grad}\varphi. \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{a}&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{a},\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{4.62}$$

如果数量场 $\psi(x, y, z)$ 以及向量场 $\boldsymbol{b}(x, y, z)$的各个分量 $b_x(x, y, z)$、$b_y(x, y, z)$、$b_z(x, y, z)$ 也都具有各种一阶连续偏导数, 则根据梯度、散度和旋度在直角坐标系内的形式, 还可以得到下列结果:

$$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi, \tag{4.63}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}, \tag{4.64}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}. \tag{4.65}$$

如果数量场 $\varphi(x, y, z)$和向量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$的各个分量 $a_x(x, y, z)$、$a_y(x, y, z)$、$a_z(x, y, z)$都具有各种二阶偏导数, 则通过运算还可以得到下列结果:

$$\nabla\times\nabla\varphi=\boldsymbol{0}, \tag{4.66}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0, \tag{4.67}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}. \tag{4.68}$$

式(4.68)中的 Δ 也是一个算子, 称为拉普拉斯(Laplace)算子, 其形式为

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{4.69}$$

它作用于向量场 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, 即为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{a}&=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}\tag{4.70}$$

我们可以看出式(4.66)、(4.67)和(4.68)在形式上与向量运算的结果是一致的.

又由于形式向量 ∇ 的分量均为微分算符，因而根据微分运算法则，我们还可以得到下列结果:

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{a}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a}),\tag{4.71}$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{a}+\varphi(\nabla\times\boldsymbol{a}),\tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\\&\quad+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}),\end{aligned}\tag{4.73}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}),\tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\\&\quad-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}),\end{aligned}\tag{4.75}$$

其中 $\boldsymbol{a}\cdot\nabla$ 和 $\boldsymbol{b}\cdot\nabla$ 均应看作为算子:

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\nabla=b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z},$$

故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}&=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=\left(a_x\frac{\partial b_x}{\partial x}+a_y\frac{\partial b_x}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\\&\quad+\left(a_x\frac{\partial b_y}{\partial x}+a_y\frac{\partial b_y}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(a_x\frac{\partial b_z}{\partial x}+a_y\frac{\partial b_z}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

2. 曲线坐标

如果我们要考察一根半径为 R, 长度为无限的金属圆管内电

场 $\boldsymbol{E}$ 的情况. 显然,采用圆柱坐标(r, θ, z)来描述管内一点 M 的位置最为方便(见图4.32). 但如果仍把点 M 处的电场 $\boldsymbol{E}$ 按直角坐标系的坐标向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向进行分解,则将破坏关于圆柱的对称性,使用起来并不方便. 为了保持关于圆柱的对称性,我们可把点 M 处的电场 $\boldsymbol{E}$ 按该点处的轴向、径向和切向进行分解,即按图4.32所示的 $\boldsymbol{e}_z$、$\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向进行分解. 因此为了实用上的方便,我们不仅需要采用柱坐标、球坐标等坐标系来描述点的位置,而且还需要在这些坐标系中引进相应的单位向量来描述向量场. 下面我们先介绍一般曲线坐标的情况.

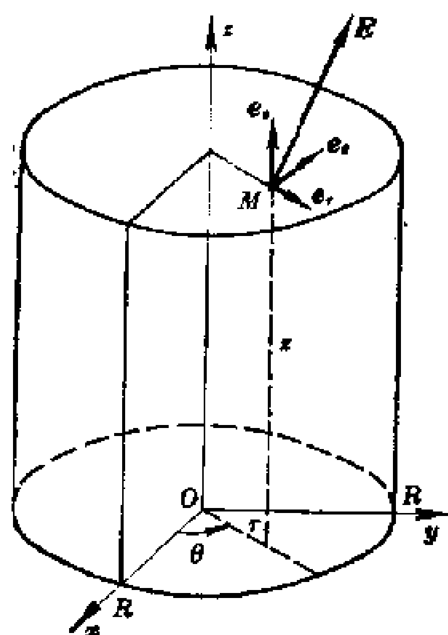


图 4.32

设直角坐标(x, y, z)与曲线坐标(u, v, w)的变换方程如下:

$$\begin{cases} x=x(u, v, w), \\ y=y(u, v, w), \\ z=z(u, v, w). \end{cases} \tag{4.76}$$

这些函数都具有各种一阶连续偏导数. 当函数行列式 $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$ 时,上述方程组就唯一确定了函数组:

$$\begin{cases} u=u(x, y, z), \\ v=v(x, y, z), \\ w=w(x, y, z). \end{cases} \tag{4.77}$$

(u, v, w)坐标系的三族坐标曲面分别为

$$\begin{cases} u(x, y, z)=\text{常数}, \\ v(x, y, z)=\text{常数}, \\ w(x, y, z)=\text{常数}, \end{cases}$$

它的三族坐标曲线分别为

$$\begin{cases} v(x, y, z)=\text{常数}, \\ w(x, y, z)=\text{常数}; \end{cases} \begin{cases} w(x, y, z)=\text{常数}, \\ u(x, y, z)=\text{常数}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y, z)=\text{常数}, \\ v(x, y, z)=\text{常数}. \end{cases}$$

于是过点 $M(u_0, v_0, w_0)$ 的一条坐标曲线

$$\begin{cases} v(x, y, z)=v_0, \\ w(x, y, z)=w_0 \end{cases}$$

上任一点 (x, y, z) 的各个坐标，由式(4.76)可知应具有下列形式：

$$\begin{cases} x=x(u, v_0, w_0), \\ y=y(u, v_0, w_0), \\ z=z(u, v_0, w_0). \end{cases}$$

换句话说，这条坐标曲线可以写成下列形式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(u, v_0, w_0) \\ &= x(u, v_0, w_0)\boldsymbol{i}+y(u, v_0, w_0)\boldsymbol{j}+z(u, v_0, w_0)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

易知，对于向量函数

$$\boldsymbol{r}(u, v, w)=x(u, v, w)\boldsymbol{i}+y(u, v, w)\boldsymbol{j}+z(u, v, w)\boldsymbol{k}$$

而言，它在点 M 处关于 u 的偏导数：

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|_M=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_M\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_M\boldsymbol{j}+\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_M\boldsymbol{k}$$

就是此坐标曲线在点 M 处的切向量．同样可知，$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|_M$ 和 $\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|_M$ 分别为过点 $M(u_0, v_0, w_0)$ 的另两条坐标曲线在点 M 处的切向量．向量 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$ 都是 (u, v, w) 的函数，而且它们均应为非零向量，否则相应的函数行列式 $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=0$．令

$$H_u=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|, \quad H_v=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|, \quad H_w=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|, \tag{4.78}$$

称它们为关于坐标 (u, v, w) 的尺度因子．我们取 $\boldsymbol{e}_u$、$\boldsymbol{e}_v$、$\boldsymbol{e}_w$ 分别为与 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$ 方向一致的单位向量，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_u = \dfrac{1}{H_u} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \\ \boldsymbol{e}_v = \dfrac{1}{H_v} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \\ \boldsymbol{e}_w = \dfrac{1}{H_w} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}. \end{cases} \tag{4.79}$$

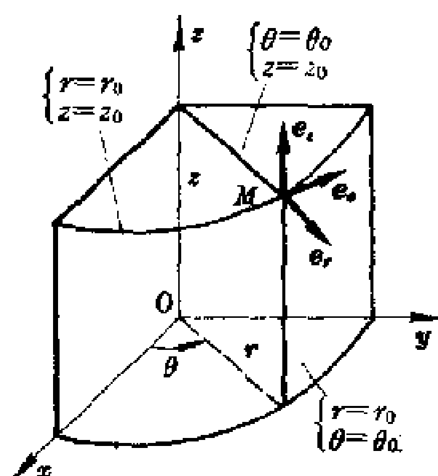


图 4.33

例 1 柱坐标(r, θ, z)的变换方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

因而
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \ \frac{\partial x}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta, \ \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

由此可得关于柱坐标(r, θ, z)的尺度因子分别为

$$H_r = 1, \ H_\theta = r, \ H_z = 1. \tag{4.80}$$

柱坐标系相应的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$(图 4.33).

例 2 球坐标(ρ, φ, θ)的变换方程为

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$$

因而

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \sin\varphi\cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\varphi\sin\theta;$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi\sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sin\varphi\cos\theta;$$
$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\varphi, \ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi, \ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

由此可知球坐标(ρ, φ, θ)的尺度因子分别为.

$$\begin{cases} H_\rho = 1, \\ H_\varphi = \rho, \\ H_\theta = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{4.81}$$

球坐标系相应的单位向量 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_\theta$(图 4.34)。

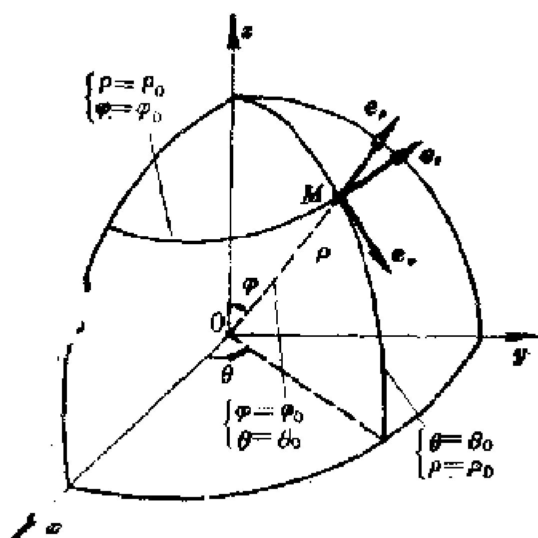


图 4.34

如果曲线坐标系(u, v, w)的三族坐标曲线在任一点处都是正交的(即在任一点处 $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ 相互垂直),则称这个曲线坐标系是正交的。易知柱坐标系(r, θ, z)是正交的曲线坐标系,且在任一点处单位向量 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ 都依次组成右手系;球坐标系(ρ, φ, θ)也是正交的曲线坐标系,且任一点处的 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 都依次组成右手系。

3. 梯度在正交曲线坐标系内的形式

设(u, v, w)为正交曲线坐标系。曲面 $u(x, y, z)=u_0$ 为通过点 $M(u_0, v_0, w_0)$ 的一个坐标曲面。显然,在点 M 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u$ 是等位面 $u(x, y, z)=u_0$ 在点 M 处的法向量。因此在点 M 处的梯度 $\mathrm{grad}\,u$ 与此曲面上过点 M 的二条坐标曲线

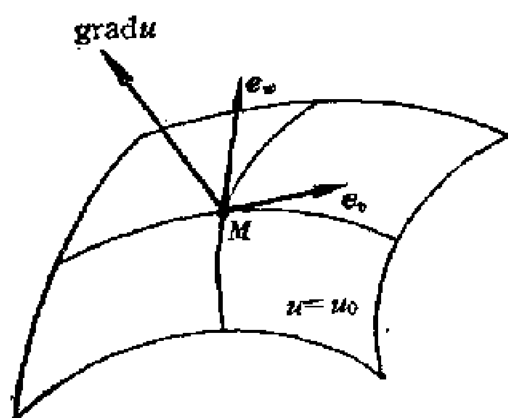


图 4.35

$$\begin{cases} u(x, y, z)=u_0, \\ w(x, y, z)=w_0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u(x, y, z)=u_0, \\ v(x, y, z)=v_0, \end{cases}$$

在点 M 处的单位切线向量 $\boldsymbol{e}_v$ 和 $\boldsymbol{e}_w$ 是相互垂直的(见图 4.35)。在点 M 处的单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 与 $\boldsymbol{e}_v$ 和 $\boldsymbol{e}_w$ 也是相互垂直的,而且 $\mathrm{grad}\,u$

与 $\boldsymbol{e}_u$ 都指向 u 值增大的方向，因而两者方向是一致的，即应有

$$\operatorname{grad} u=|\operatorname{grad} u|\boldsymbol{e}_u. \tag{4.82}$$

由式(4.78)可知，向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v,\ w)=x(u,\ v,\ w)\boldsymbol{i}+y(u,\ v,\ w)\boldsymbol{j}+z(u,\ v,\ w)\boldsymbol{k}$$

在点 M 处的偏导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=H_u\boldsymbol{e}_u. \tag{4.83}$$

从式(4.82)和(4.83)便得

$$\operatorname{grad} u\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=H_u|\operatorname{grad} u|.$$

又因为方程组(4.77)是由(4.76)所解得的，因而

$$u[x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)]=u.$$

对上式的两边关于 u 求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=1.$$

于是有

$$\begin{aligned}H_u|\operatorname{grad} u|&=\operatorname{grad} u\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=1.\end{aligned} \tag{4.84}$$

由式(4.82)和(4.84)可得

$$\operatorname{grad} u=\frac{1}{H_u}\boldsymbol{e}_u.$$

同样可得　　$\operatorname{grad} v=\dfrac{1}{H_v}\boldsymbol{e}_v,\ \operatorname{grad} w=\dfrac{1}{H_w}\boldsymbol{e}_w.$

最后可以得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}(F(u,\ v,\ w))\\&=\frac{\partial F}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial F}{\partial v}\operatorname{grad} v+\frac{\partial F}{\partial w}\operatorname{grad} w\\&=\frac{1}{H_u}\frac{\partial F}{\partial u}\boldsymbol{e}_u+\frac{1}{H_v}\frac{\partial F}{\partial v}\boldsymbol{e}_v+\frac{1}{H_w}\frac{\partial F}{\partial w}\boldsymbol{e}_w.\end{aligned} \tag{4.85}$$

例 3　由式(4.85)和(4.80)可知，在柱坐标系中，梯度 ∇F 的形式为

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{4.86}$$

由式(4.85)和(4.81)可知，在球坐标系中，梯度 ∇F 的形式为

$$\nabla F=\frac{\partial F}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{4.87}$$

4. 散度在正交曲线坐标系内的形式

设(u, v, w)为一个正交曲线坐标系，$\boldsymbol{a}(u, v, w)$为一个向量场，在点$M(u_0, v_0, w_0)$处的三个单位向量分别为$\boldsymbol{e}_u$、$\boldsymbol{e}_v$、$\boldsymbol{e}_w$. 在任一点(u, v, w)处，向量$\boldsymbol{a}$在该点处的$\boldsymbol{e}_u$、$\boldsymbol{e}_v$、$\boldsymbol{e}_w$上的投影分别为a_u、a_v、a_w，即

$$\boldsymbol{a}=a_u\boldsymbol{e}_u+a_v\boldsymbol{e}_v+a_w\boldsymbol{e}_w.$$

设a_u、a_v、a_w都具有各种一阶连续偏导数. 类似于考察散度在直角坐标系中的形式的做法，我们考察由六个坐标曲面

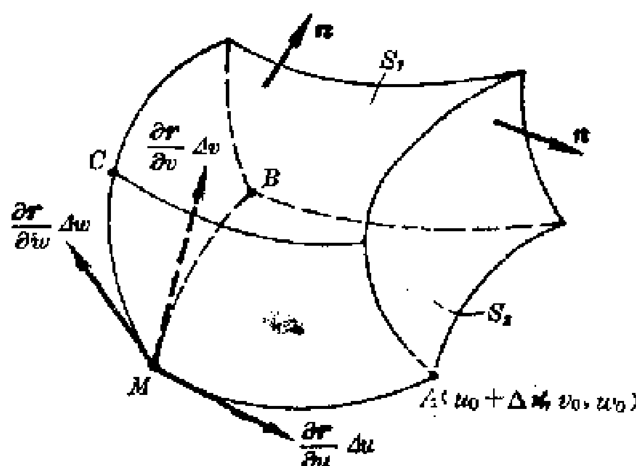


图 4.36

$$u(x, y, z)=u_0,\ v(x, y, z)=v_0,\ w(x, y, z)=w_0,$$
$$u(x, y, z)=u_0+\Delta u,\ v(x, y, z)=v_0+\Delta v,$$
$$w(x, y, z)=w_0+\Delta w,$$

(不妨设 $\Delta u>0$, $\Delta v>0$, $\Delta w>0$)所围成的曲六面体的体积 ΔV. 因为曲六面体的棱 MA(见图 4.36)即为坐标曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0, w_0)$$
$$=x(u, v_0, w_0)\boldsymbol{i}+y(u, v_0, w_0)\boldsymbol{j}+z(u, v_0, w_0)\boldsymbol{k}$$

上自 $u=u_0$ 到 $u=u_0+\Delta u$ 的一段. 易知它的长度可写成为

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0, w_0)}{\partial u}\Delta u\right|+o(\Delta u)$$

同样可知，曲六面体上棱 MB 和 MC 的长度分别为

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0, w_0)}{\partial v}\Delta v\right|+o(\Delta v),$$

和 $$\left|\frac{\partial r(u_0, v_0, w_0)}{\partial w}\Delta w\right|+o(\Delta w).$$

当 $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$, $\Delta w\to 0$ 时，棱 MA、MB、MC 都将转化为直线，曲六面体将转化为一个平行六面体. 向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 将分别转化成向量 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}dw$. 所以根据向量混合积的几何意义，便知曲六面体的体积微元 dV 可写成下列形式：

$$dV=\left|\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}dw\right|.$$

由式(4.79)便得：

$$dV=H_uH_vH_w\,du\,dv\,dw. \tag{4.88}$$

根据散度的定义，应用曲六面体微元可把点 M 处的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 写成下列形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\sum\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}}{dV}. \tag{4.89}$$

其中 $\sum\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 即为曲六面体微元的六个面上 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 之和. 图 4.36 中微元的面 S_1 和 S_2 分别对应于坐标曲面 $w=w_0+dw$ 和 $w=w_0$. 易知，点 M 处的 $\boldsymbol{e}_w$ 垂直于 S_2，而且对有向曲面 S_2 来说 $d\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{e}_w$ 的方向恰相反. 根据向量积的几何意义，同时注意到曲线坐标系的正交性，便有

$$|d\boldsymbol{S}|=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv\right|=H_uH_v\,du\,dv.$$

因此在 S_2 上有

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=-(a_wH_uH_v)\big|_{(u_0,v_0,w_0)}du\,dv.$$

同样可知，在 S_1 上有

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=(a_wH_uH_v)\big|_{(u_0,v_0,w_0+dw)}du\,dv$$

把上面两式相加，再根据中值定理和偏导数的连续性，便得微元的 S_1 和 S_2 上 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 之和为

$$\sum_{S_1,S_2}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\partial(a_wH_uH_v)}{\partial w}\bigg|_M du\,dv\,dw.$$

同样可得，曲六面体微元上相应于坐标曲面 $u=u_0$, $u=u_0+d_u$ 的两个面 S_3 和 S_4 上 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 的和为

$$\sum_{S_3,S_4} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\left.\frac{\partial(a_uH_vH_w)}{\partial u}\right|_M du\,dv\,dw$$

以及相应于坐标曲面 $v=v_0$, $v=v_0+dv$ 的两个面 S_5 和 S_6 上 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$ 之和

$$\sum_{S_5,S_6} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}=\left.\frac{\partial(a_vH_wH_u)}{\partial v}\right|_M du\,dv\,dw.$$

于是根据式(4.88)和(4.89)，最后得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_uH_vH_w}\left[\frac{\partial(a_uH_vH_w)}{\partial u}+\frac{\partial(a_vH_wH_u)}{\partial v}+\frac{\partial(a_wH_uH_v)}{\partial w}\right]. \tag{4.90}$$

例 4 由式(4.90)和(4.80)便知，在柱坐标系内散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的形式为：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{a}&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(a_rr)}{\partial r}+\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial(a_zr)}{\partial z}\right]\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial(a_rr)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.\end{aligned} \tag{4.91}$$

由式(4.90)和(4.81)便知，在球坐标系内散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 的形式为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{a}&=\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial(a_\rho\rho^2\sin\varphi)}{\partial\rho}+\frac{\partial(a_\varphi\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(a_\theta\rho)}{\partial\theta}\right]\\&=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(a_\rho\rho^2)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial(a_\varphi\sin\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}.\end{aligned} \tag{4.92}$$

5. 旋度在正交曲线坐标系内的形式

为求得向量场 $\boldsymbol{a}$ 在正交曲线坐标系 (u, v, w) 内旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的形式，我们计算在点 $M(u_0, v_0, w_0)$ 处的旋度在该点处的 $\boldsymbol{e}_w$ 上的投影. 为此，考察坐标曲面 $w=w_0$ 上四条坐标曲线：

$$\begin{cases}w=w_0,\\u=u_0;\end{cases}\quad\begin{cases}w=w_0,\\v=v_0;\end{cases}\quad\begin{cases}w=w_0,\\u=u_0+\Delta u;\end{cases}\quad\begin{cases}w=w_0,\\v=v_0+\Delta v.\end{cases}$$

(不妨设 $\Delta u>0$, $\Delta v>0$)所围成的曲四边形 ΔS 的面积(参看图 4.37). 当 $\Delta u\to0$, $\Delta v\to0$ 时，此曲四边形的边都将转化为直线，向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$ 将分别转化为 $\left.\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\right|_M du$、$\left.\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|_M dv$，其中向量函数

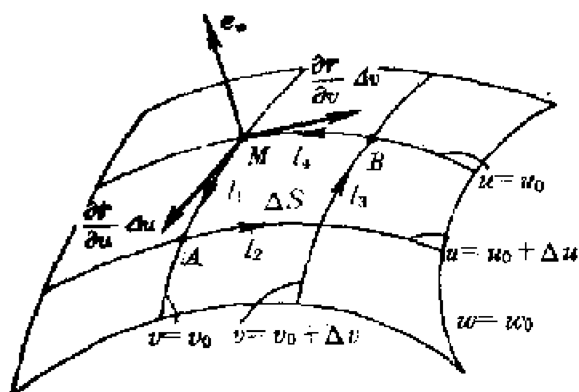


图 4.37

$$r(u, v, w) = x(u, v, w)\boldsymbol{i} + y(u, v, w)\boldsymbol{j} + z(u, v, w)\boldsymbol{k},$$

而 $x(u, v, w)$、$y(u, v, w)$、$z(u, v, w)$ 由式(4.76)给定. 同时，曲四边形将转化为一个平行四边形. 所以，注意到式(4.79)和曲线坐标系的正交性，此微元曲四边形的面积

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}dv\right| = H_u H_v du\,dv. \tag{4.93}$$

再根据旋度的定义，可知旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}_w$ 上的投影可以写成为

$$\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_w = \frac{\sum \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}}{dS}, \tag{4.94}$$

其中 $\sum\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 为 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 在图 4.37 中微元曲四边形中四条有向边界曲线 l_1、l_2、l_3、l_4 上的和. 显然，在 l_1 上，

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = (a_u\boldsymbol{e}_u + a_v\boldsymbol{e}_v + a_w\boldsymbol{e}_w)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}du\right) = (a_u H_u)\big|_{(u_0, v_0, w_0)}du.$$

而在 l_3 上，

$$\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \quad (a_u H_u)\big|_{(u_0, v_0+dv, w_0)}du.$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 在 l_1 和 l_3 上之和，在应用中值定理后可以写成如下形式：

$$\sum_{l_1, l_3}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial(a_u H_u)}{\partial v}\bigg|_M du\,dv.$$

同样可得 $\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 在 l_2 和 l_4 上之和为

$$\sum_{l_2, l_4}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\partial(a_v H_v)}{\partial u}\bigg|_M du\,dv.$$

最后由上两式及式(4.93)、(4.94)，便得

$$\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_w = \frac{1}{H_u H_v}\left[\frac{\partial(a_v H_v)}{\partial u} - \frac{\partial(a_u H_u)}{\partial v}\right].$$

同理可知:

$$\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_v=\frac{1}{H_wH_u}\left[\frac{\partial(a_uH_u)}{\partial w}-\frac{\partial(a_wH_w)}{\partial u}\right],$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_u=\frac{1}{H_vH_w}\left[\frac{\partial(a_wH_w)}{\partial v}-\frac{\partial(a_vH_v)}{\partial w}\right].$$

最后可把旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 写成下列容易记忆的形式:

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_uH_vH_w}\begin{vmatrix} H_u\boldsymbol{e}_u & H_v\boldsymbol{e}_v & H_w\boldsymbol{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ H_ua_u & H_va_v & H_wa_w \end{vmatrix}. \tag{4.95}$$

例 5 由式(4.95)和(4.80)便知,在柱坐标系内旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的形式为:

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_r & ra_\theta & a_z \end{vmatrix}. \tag{4.96}$$

由式(4.95)和(4.81)便知,在球坐标系内旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 的形式为:

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & \rho\sin\varphi a_\theta \end{vmatrix}. \tag{4.97}$$

6. ΔF 在正交曲线坐标系内的形式

设$\{O;\boldsymbol{e}_u,\boldsymbol{e}_v,\boldsymbol{e}_w\}$为一个正交曲线坐标系,函数 $F(u,v,w)$ 具有各种二阶连续偏导数. 按照算子 Δ 的定义,

$$\Delta F=\Delta\cdot\nabla F.$$

于是由式(4.85)和(4.90)可得

$$\begin{aligned}\Delta F&=\nabla\cdot\nabla F\\ &=\nabla\cdot\left[\frac{1}{H_u}\frac{\partial F}{\partial u}\boldsymbol{e}_u+\frac{1}{H_v}\frac{\partial F}{\partial v}\boldsymbol{e}_v+\frac{1}{H_w}\frac{\partial F}{\partial w}\boldsymbol{e}_w\right]\\ &=\frac{1}{H_uH_vH_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_vH_w}{H_u}\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_wH_u}{H_v}\frac{\partial F}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_uH_v}{H_w}\frac{\partial F}{\partial w}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.98}$$

例 6 由式(4.98)和(4.80)便知，ΔF在柱坐标系内的形式为：

$$\Delta F=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]$$
$$=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{4.99}$$

由式(4.98)和(4.81)便知，ΔF 在球坐标系内的形式为：

$$\Delta F=\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}. \tag{4.100}$$

习 题

§1

1. 试求函数$u(x,y,z)$沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial l}$：

(1) $u=x^2-xy+z^2$, $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

(2) $u=xy^2z^3$, $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$;

(3) $u=\sin(x+y)+\cos(y-z)$, $\boldsymbol{l}=\pi\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$;

(4) $u=e^{z-2y}\cos 2x$, $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

(5) $u=\ln(x+y+z)$, $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

2. 求函数 $u=2xy-z^3$ 在点(2, −1, 1)处沿指向点(3, 1, −1)的方向上的方向导数.

3. 试求下列数量场 $u=u(x, y, z)$在指定点处的梯度：

(1) $u=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, 在点(1, 2, −2)处;

(2) $u=\ln(x^2+y^2)$, 在点(3, −4, 0)处;

(3) $u=e^{x+y}\cos z$, 在点(1, 0, π)处;

(4) $u=\cos 3x\cos 4y\,\mathrm{sh}\,z$, 在点$\left(0, \dfrac{\pi}{4}, 0\right)$处;

(5) $u=z\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$, 在点(2, 2, −1)处.

4. 试求数量场 $u=e^{x+y}\cos z$ 过点(1, 0, π)的等值面方程.

5. 试问数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z+12$ 在何处的梯度为零

向量.

6. 试问数量场 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在哪些点上的梯度与 $\boldsymbol{k}$ 平行.

7. 设函数 $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$, $w=f(u, v)$ 都是可微的. 证明:

$$\operatorname{grad} w=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

8. 试问: 在点 $M_0(2, -1, 2)$ 处, 函数 $u=(x+y)^2+(z+y)^2+(x+z)^2$ 在哪个方向上增长率(移动单位距离所增加的函数值)最大? 在这个方向上, 函数 u 在 M_0 处的瞬时增长率是多少?

9. 证明 $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

10. 求数量场 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1, 2, 2)$ 及点 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间的夹角 φ.

§ 2

1. 设向量场 $\boldsymbol{a}=(x-z)y\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+(y^2+xz)\boldsymbol{k}$, 有向闭曲面 S 为由平面 $x=0$, $x=b$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=b$ 所围成的正方体的表面, 法线方向指向正方体的外侧. 试求曲面积分 $\displaystyle\oint\!\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$.

2. 设向量场 $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$, 有向曲面 S 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的外侧. 试求曲面积分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$.

3. 计算下列曲面积分:

(1) $\displaystyle\iint_S x^2y^2\,dx\,dy$, S: 半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\leqslant 0$ 的外侧;

(2) $\displaystyle\oint\!\!\!\!\oint_S (x+y+z)dx\,dy+(y-z)dy\,dz$, S: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ 所围成的正立方体的表面的外侧.

4. 计算曲面积分:

$$\iint_{S_1+S_2}(z+1)dx\,dy+xy\,dx\,dz,$$

其中 S_1 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0$ 及 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分, 其法向与 Ox 轴正向交成锐角, S_2 为 xOy 平面上半圆域: $x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant 0$, 它的法向与 Oz 轴正向相反.

5. 计算曲面积分:

$$\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 限于 $x^2+y^2-x\leqslant 0$, $z\geqslant 0$ 内的部分的外侧.

§ 3

1. 计算下列向量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度:

(1) $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}=x\sin y\boldsymbol{i}+z\cos y\boldsymbol{j}-yx\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=e^{y+z}\boldsymbol{i}+ye^{x}\boldsymbol{j}+xe^{y}\boldsymbol{k}$.

2. 设 $\varphi(x, y, z)$ 是一个数量场, $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 是一个向量场, 它们都具有一阶连续偏导数. 试证明:

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi.$$

3. 设 $\varphi(x, y, z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\boldsymbol{a}=\cos x\boldsymbol{i}+\cos y\boldsymbol{j}+\sin z\boldsymbol{k}$, 试求 $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a})$.

4. 设 $\varphi(x, y, z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, 试求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$.

5. 若 $\boldsymbol{a}=(2xy+z)\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}-(x+3y)\boldsymbol{k}$, 区域 V 为由平面 $2x+2y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成的立体, 试对它们验证 Gauss 定理.

6. 应用 Gauss 定理计算下列曲面积分:

(1) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S(x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{S}$, S 为立方体: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$ 的表面的外侧;

(2) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S(z^2-x)\boldsymbol{i}-xy\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}]\cdot d\boldsymbol{S}$, S 为由 $z=4-y^2$, $x=0$, $x=3$, $z=0$ 所围成的立体的表面的外侧;

(3) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S(x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{S}$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

(4) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S(x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{S}$, S 为由 $x^2+y^2-z^2=0$, $z=h(h>0)$ 所围成之立体的表面的外侧.

7. 计算曲面积分:

$$\iint_S\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

其中 $A_1=x^3-x^2y+z^3$, $A_2=xy^2+y^3$, $A_3=xz+z^2$, S 是由抛物线

$$\begin{cases}z=1-y^2,\\ x=0\end{cases}\quad(0\leqslant y\leqslant 1)$$

绕 z 轴旋转而成的曲面的外侧.

8. 设 Ω 是一个空间闭区域, S 是 Ω 的边界面, 它是分片光滑的, 函数

$u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$在 Ω 上有二阶连续偏导数. 试证:

$$\oiint_S (u\,\mathrm{grad}\, v - v\,\mathrm{grad}\, u)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega,$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, 有向曲面 S 为 Ω 边界面外侧.

§ 4

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_l [(y^2 - z^2)\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}]\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$, 从 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段;

(2) $\int_l [x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (x+y-1)\boldsymbol{k}]\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为从点(1, 1, 1)到点(2, 3, 4)的一段直线;

(3) $\int_l [(x^2 - 2xy)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2xy)\boldsymbol{j}]\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为 xOy 坐标平面上的曲线 $y=x^2$ 从 $x=-1$ 到 $x=1$ 的一段;

(4) $\int_l [(x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}]\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为 xOy 坐标平面上曲线 $y=x^2-x$ 从 $x=1$ 到 $x=2$ 的一段;

(5) $\int_l (yz\boldsymbol{i} + z\sqrt{R^2 - y^2}\,\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为曲线 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{a}{2\pi}t$, 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段, 其中 R, a 为常数.

2. 计算下列向量场的旋度:

(1) $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a} = x\sin y\boldsymbol{i} + z\cos y\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j}$.

3. 设 $\boldsymbol{a} = 3xz^2\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + (x+2z)\boldsymbol{k}$, 求 $\mathrm{rot\,rot}\boldsymbol{a}$.

4. 证明公式: $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\,\varphi\times\boldsymbol{a}$.

5. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\boldsymbol{e}$ 为任一单位常向量, 函数 $f(r)$ 可微. 试证明下列结果:

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{e}$;　　(2) $\mathrm{rot}((\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$;

(3) $\mathrm{rot}((\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$;　　(4) $\mathrm{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$.

6. 设 $\boldsymbol{a} = 3y\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$, S 为抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 中 $z\leqslant 2$ 的部分的外侧($2z > x^2 + y^2$ 一侧), l 为 S 的边界, 试以此验证 Stokes 公式成立.

7. 利用 Stokes 公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_l (y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k})\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（外侧）中满足 $x+y+z\geqslant 0$ 部分的有向边界；

(2) $\oint_l (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, l 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,\ b>0)$ 的交线，其方向为从 x 轴正向看是逆时针的；

(3) $\oint_l (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, l 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ 的表面所得的切痕，从 x 轴的正向看是逆时针方向的.

8. 设向量场 $\boldsymbol{a}=(2xy+3)\boldsymbol{i}+(x^2-4z)\boldsymbol{j}-4y\boldsymbol{k}$,

(1) 证明 $\boldsymbol{a}$ 是一个保守场；

(2) 求出保守场 $\boldsymbol{a}$ 的一个势函数；

(3) 计算 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$, l 为由点 $(3,\ -1,\ 2)$ 到点 $(2,\ 1,\ -1)$ 的任一段曲线.

9. 判定向量场 $\boldsymbol{a}$ 是否为保守场，若是，试求出其一个势函数：

(1) $\boldsymbol{a}=(z^3-4xy)\boldsymbol{i}+(6y-2x^2)\boldsymbol{j}+(3xz+1)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}=(xz-y)\boldsymbol{i}+(x^2y+z^3)\boldsymbol{j}+(3xz^2-xy)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$;

(4) $\boldsymbol{a}=2xe^{-y}\boldsymbol{i}+(\cos z-x^2e^{-y})\boldsymbol{j}-y\sin z\,\boldsymbol{k}$.

10. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_l (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$, 其中有向曲线 l 的参数方程为：$x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=\frac{t}{\pi}$ $(t:\ 0\to 2\pi)$;

(2) $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$ 其中 $\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)=(e^{-z}+2x\cos y)\boldsymbol{i}-x^2\sin y\boldsymbol{j}-xe^{-z}\boldsymbol{k}$, 有向曲线 l 的参数方程为：$x=1-\sin t$, $y=\pi\cos t+\frac{2}{3}t$, $z=t^2\cos t$. $\left(t:\ 0\to\frac{3}{2}\pi\right)$.

§5

1. 设曲线积分 $\oint_l (x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中 l 为正方形 $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$ 的边界，对此验证 Green 公式.

2. 利用 Green 公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_l (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$, l 为以 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(3,\ 2)$ 为顶点的三角形；

(2) 设 l 为圆周 $x^2+y^2=4$, 计算上题的曲线积分；

(3) $\oint_l (x+y)dx-(x-y)dy$，l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(4) $\oint_l (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，$l$ 为半圆 $x^2+y^2\leqslant ax$，$y\geqslant 0$ 的边界($a>0$)；

(5) $\oint_l \dfrac{x}{x^2+y^2}dy-\dfrac{y}{x^2+y^2}dx$，$l$ 为曲线 $|x|+|y|=1$.

3. 说明下列平面向量场都是保守场，并求出它的一个势函数：

(1) $\boldsymbol{a}=(x^2+2xy-y^2)\boldsymbol{i}+(x^2-2xy-y^2)\boldsymbol{j}$；

(2) $\boldsymbol{a}=(2x\cos y-y^2\sin x)\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{a}=e^x[e^y(x-y+2)+y]\boldsymbol{i}+e^x(e^y(x-y)+1)\boldsymbol{j}$.

4. 证明平面向量场 $\boldsymbol{a}=(2xy-y^4+3)\boldsymbol{i}+(x^2-4xy^3)\boldsymbol{j}$ 是一个保守场，并求出它的一个势函数，再计算向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿 xOy 坐标面上某一条由(1, 0)到(2, 1)的曲线 l 的曲线积分 $\int_l \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{l}$.

5. 验证下列曲线积分与积分路径无关，并求其值：

(1) $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$；　　(2) $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$；

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy$.

6. 计算曲线积分 $\int_l (2xy^3-y^2\cos x)\,dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中 l 为 xOy 坐标面上的抛物线 $x=\dfrac{\pi}{2}y^2$ 上由点(0, 0)到点$\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$的一段.

7. 确定 λ 的值，使曲线积分 $\int_A^B (x^4+4xy^\lambda)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$ 与积分路径无关，并求当 A、B 分别为(0, 0)、(1, 2)时该曲线积分的值.

8. 已知曲线积分 $\int_L (x+xy\sin x)dx+\dfrac{1}{x}f(x)dy$ 与积分路径无关，其中 L 是自 $A(\pi, 1)$到 $B(2\pi, 0)$的任一曲线，$f(x)$是可微函数，且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，求 $f(x)$，并对此 $f(x)$ 计算上述曲线积分.

9. 设函数 $f(u)$ 连续，l 为平面上逐段光滑的闭曲线. 证明：

$$\oint_l f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

§ 6

1. 证明　$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$.

2. 证明　$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}$.

3. 证明　$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})$.

4. 证明　$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$.

5. 若 V 为有向闭曲面 S 所包围的立体，S 的法线向量指向外侧，试证：

$$\oint\!\!\!\oint_S (\psi\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V(\psi\Delta\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dV.$$

6. 试求下列函数在柱坐标系和球坐标系中的梯度：

(1) $\varphi=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$;　　　　(2) $\varphi=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

7. 试求向量场 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+\cos z\,\boldsymbol{k}$ 在柱坐标系中的散度和旋度.

8. 试求球坐标系中向量 $\boldsymbol{a}=\rho\boldsymbol{e}_\rho-\theta\boldsymbol{e}_\varphi+\varphi\boldsymbol{e}_\theta$ 的散度、旋度和 $\Delta\boldsymbol{a}$.

9. 从直角坐标到抛物柱坐标的变换方程为：

$$x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\ y=uv,\ z=w.$$

(1) 证明此抛物柱面坐标系是正交的；

(2) 求出它的尺度因子；

(3) 写出此曲线坐标系中梯度的形式.

第五章　级　数

§1　数项级数

1. 概念和性质

若 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 为一数列，则称

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{5.1}$$

为一个无穷级数，或简称级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 它的第 n 项 u_n 称为此级数的一般项或通项. 级数(5.1)的前 n 项之和记为 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{5.2}$$

称这种 S_n 为级数(5.1)的部分和，称数列 $\{S_n\}$ 为级数的部分和数列. 如果数列$\{S_n\}$以一个有限值 S 为它的极限，则称此极限值 S 为级数(5.1)之和.

例 1　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 之和.

解　因为此级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (\text{共 } n \text{ 项}) \\ &=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}, \end{aligned}$$

故当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to+\infty$. 所以此级数的和不存在.

例 2　考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 的和.

解　易知，它的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

故当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to2$. 所以此级数之和等于2.

定义 5.1 如果级数(5.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 以一个有限值 S 为极限，则称级数(5.1)是收敛的，并称此 S 为此级数的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S; \tag{5.3}$$

如果数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在，则称级数(5.1)是发散的.

例 3 考察几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}(a\neq0)$ 的收敛性.

解 当 $|q|\neq1$ 时，此几何级数的部分和可写成

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

由此可知：

(1) 当 $|q|<1$ 时，$q^n\to0\ (n\to+\infty)$，所以这时级数收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}. \tag{5.4}$$

(2) 当 $|q|>1$ 时，$q^n\to\infty\ (n\to+\infty)$，所以这时级数发散.

(3) 当 $q=1$ 时，$S_n=na$. 显然，这时级数也是发散的.

(4) 当 $q=-1$ 时，

$$S_n=a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a.$$

因此，这时级数也是发散的.

下面我们讨论关于数项级数的若干基本性质.

性质 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，k 为一个常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right). \tag{5.5}$$

证明 设 S_n 和 σ_n 分别为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 的部分和，且

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. 显然应有

$$\sigma_n = kS_n.$$

故
$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} kS_n = k\lim_{n\to+\infty} S_n = kS.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 收敛，且式(5.5)成立. ▌

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 也是收敛的，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{5.6}$$

证明 设 A_n、B_n 和 S_n 分别表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 的前 n 项的部分和，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. 显然应有

$$S_n = A_n + B_n.$$

故
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to+\infty} A_n + \lim_{n\to+\infty} B_n = A + B.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛，且式(5.6)成立. ▌

请注意，当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散级数时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 不一定发散. 例如，当 $a_n \equiv 1$，$b_n \equiv -1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散的，但 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 却是一个收敛的级数.

例 4 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{4}{3^{n-1}}\right)$ 的收敛性.

解 由例 3 可知几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$ 都是收敛的，而且进一步由式(5.4)可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n-1}}=\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=6.$$

所以根据性质 2 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{4}{3^{n-1}}\right)$是收敛的，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{4}{3^{n-1}}\right)=1-6=-5.$$

性质 3（收敛的必要条件）　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0. \tag{5.7}$$

证明　设 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项的部分和，则

$$u_n=S_n-S_{n-1}.$$

由假设，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，故数列$\{S_n\}$的极限存在，设它为 S. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}$$
$$=S-S=0.\quad ▌$$

请注意，满足式(5.7)条件的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定是收敛的，如例 1 中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 即是如此.

性质 4［柯西(Cauchy)收敛原理］　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为：对于任意给定的正数 ε，都存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon \tag{5.8}$$

对任一正整数 p 都成立.

证明　设 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项的部分和. 根据柯西原理可知，数列 $\{S_n\}$ 的极限存在的充要条件为：对于任意给定的正数 ε，都存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对任一正整数 p 都成立. 而

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p},$$

由此就可得到性质 4. ▌

由收敛原理可知，改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中有限项的数值不会影响级数的收敛性（若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则改变后仍收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则改变后仍发散）. 于是可得下列性质：

性质 5 改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 内有限项的数值后所得的级数与原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同的收敛性.

例 5 考察下列级数的收敛性：

$$-2^{10}-2^{9}-\cdots-2^{0}+0+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots.$$

解 如果把上述级数的前 11 项的数值都改成零，则由例 1 可知所得的级数是发散的. 由性质 5 便知所考察的级数也是发散的.

2. 正项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每一项都是非负的（$u_n\geqslant 0$），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个正项级数. 显然，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是一个单调递增的数列. 我们知道，单调的有界数列 $\{S_n\}$ 必有极限. 由此可得到正项级数收敛的一个充分必要条件如下：

定理 5.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 6 考察 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性.

解 p 级数显然是一个正项级数. 特别当 $p=1$ 时，相应的 p 级数称为调和级数.

(1) 当 $p\leqslant 1$ 时，

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}.$$

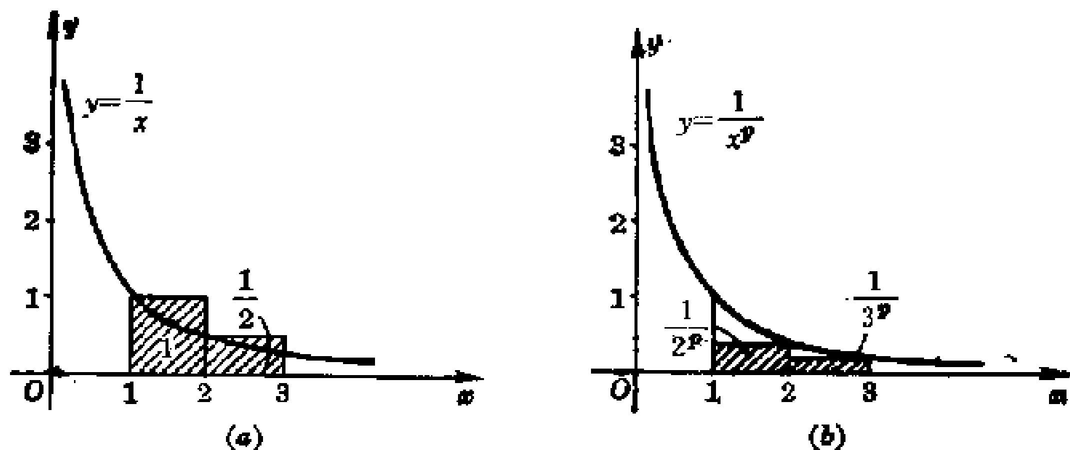


图　5.1

由图 5.1(a) 易得下述结果:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1).$$

当 $n\to+\infty$ 时, $\ln(n+1)\to+\infty$. 因而此时 p 级数发散.

(2) 当 $p>1$ 时, 由图 5.1(b) 易得下列结果:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}<1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\,dx$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{n^{p-1}}}{p-1}<\frac{p}{p-1}.$$

由定理 5.1, 便知此时 p 级数收敛.

定理 5.2(**比较判别法**)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两个正项级数, k 为一个常数, 且 $a_n\leqslant kb_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 则有:

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也一定收敛;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也一定发散.

证明　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{A_n\}$ 必有上界, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定收敛. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和

数列$\{B_n\}$必无上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 一定发散. ∎

例 7 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 易知，极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

故当 n 充分大时，应有

$$\sin\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

由例 6 知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 也是发散的.

定理 5.3(柯西判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个正项级数，且

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{5.9}$$

则

(1) 当 $l<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $l>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. 因而对某一给定的正数 ε，当 n 充分大时，总可使得下列不等式成立:

$$l-\varepsilon\leqslant\sqrt[n]{u_n}\leqslant l+\varepsilon.$$

(1) 当 $l<1$ 时，我们总可取到一个 $\varepsilon>0$，使得

$$0<l+\varepsilon<1.$$

所以，当 n 充分大时可使得下列不等式成立:

$$u_n\leqslant(l+\varepsilon)^n. \tag{5.10}$$

由于 $0<l+\varepsilon<1$，由例 3 可知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^n$ 是收敛的，于是从式(5.10)和定理 5.2 就可推知，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的.

(2) 当 $l>1$ 时，我们总可取到一个 $\varepsilon>0$，使得

$$l-\varepsilon>1.$$

所以，当 n 充分大时可使得下列不等式成立：

$$u_n \geqslant (l-\varepsilon)^n. \tag{5.11}$$

由例 3 可知，此时几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^n$ 是发散的. 由式(5.11)和定理 5.2 就可推知，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的. ▌

例 8 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}$ 的收敛性.

解 这两个级数都是正项级数.

(1) 当 $n\to+\infty$ 时，

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n+1))^n}}=\frac{1}{\ln(n+1)}\to 0<1.$$

由定理 5.3，便知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^n}$ 是收敛的.

(2) 当 $n\to+\infty$ 时，

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\to e>1.$$

由定理 5.3，便知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}$ 是发散的.

请注意，在定理 5.3 中，当极限 l 恰等于 1 时，相应的级数也可能是收敛的，也可能是发散的. 例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都可得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ 的结果，但从例 6 中，我们已知前者是发散的级数，而后者则是收敛的级数.

定理 5.4[达朗贝尔(D'Alembert)判别法] 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个正项级数，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \tag{5.12}$$

则有:

(1) 当 $l<1$ 时,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $l>1$ 时,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, 因而对于某一给定的正数 ε, 都存在一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时下列不等式成立:

$$l-\varepsilon\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant l+\varepsilon.$$

(1) 当 $l<1$ 时,我们总可取到一个 $\varepsilon>0$, 使得

$$0<l+\varepsilon<1.$$

同时也存在一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 下列不等式总成立:

$$u_{n+1}\leqslant(l+\varepsilon)u_n.$$

进一步可知,对于任意的正整数 p, 都有

$$u_{N+p}\leqslant(l+\varepsilon)u_{N+p-1}\leqslant(l+\varepsilon)^2u_{N+p-2}\leqslant\cdots\leqslant(l+\varepsilon)^pu_N. \tag{5.13}$$

由于 $0<l+\varepsilon<1$, 所以几何级数 $\sum_{p=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^pu_N$ 一定是收敛的. 从不等式(5.13)和定理 5.2, 便知级数 $\sum_{p=1}^{\infty}u_{N+p}$ 也是收敛的. 最后由性质 5 便得知此时正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个收敛的级数.

(2) 当 $l>1$ 时,我们总可找到一个 $\varepsilon>0$, 使得

$$l-\varepsilon>1.$$

同时也存在一个正整数 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 下列不等式总成立:

$$u_{n+1}\geqslant(l-\varepsilon)u_n.$$

进一步可知,对于任意的正整数 p, 都有

$$u_{N+p}\geqslant(l-\varepsilon)u_{N+p-1}\geqslant(l-\varepsilon)^2u_{N+p-2}\geqslant\cdots\geqslant(l-\varepsilon)^pu_N. \tag{5.14}$$

由于 $l-\varepsilon>1$, 所以几何级数 $\sum_{p=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^pu_N$ 是发散的. 由不等式

(5.14)和定理5.2,可知级数 $\sum_{p=1}^{\infty} u_{N+p}$ 一定也是发散的. 最后从性质5便得知此时正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个发散的级数. ■

例9　考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ 的收敛性.

解　这两个级数都是正项级数.

(1) 当 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{2^{n+1}}{2(n+1)-1} \Big/ \frac{2^n}{2n-1} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \to 2 > 1.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$ 是发散的.

(2) $(2n-1)!!$ 和 $(2n)!!$ 的定义如下:

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 1;$$
$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2.$$

当 $n \to +\infty$ 时,

$$\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \Big/ \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ 是收敛的.

请注意, 在定理5.4中当极限 l 恰等于1时, 相应的级数可能是收敛的, 也可能是发散的. 例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都可得到 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 的结果,但前者是一个发散的级数, 而后者是一个收敛的级数.

例10*　给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{2^n}$,其中

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

说明它是一个收敛级数,并且求出此级数之和.

解　(1) $\{F_n\}$ 称为菲波那契(Fibonacci)数列. 易知其中

$$F_0 = F_1 = 1,$$

因为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 分别为二次方程

$$x^2-x-1=0$$

的两个根．于是

$$\begin{aligned}F_{n-1}+F_{n-2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].\end{aligned}$$

由此得到菲波那契数列的递推公式：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n=2,\ 3,\ \cdots).$$

(2) 设 $u_n=\frac{F_{n-1}}{2^n}$，则

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n-1}}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}.\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1,$$

故
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1.$$

根据达朗贝尔判别法便知此级数收敛.

(3) 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $S=\lim_{n\to+\infty}S_n$. 由递推公式 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, 可得下面各式:

$$u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{4}u_{n-2},$$

$$u_{n-1}=\frac{1}{2}u_{n-2}+\frac{1}{4}u_{n-3},$$

....

$$u_3=\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{4}u_1.$$

将以上各式相加,便得

$$S_n-u_1-u_2=\frac{1}{2}S_{n-1}-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{4}S_{n-2}.$$

当 $n\to+\infty$ 时, 由上式得

$$S-u_1-u_2=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{4}S,$$

即
$$S=2u_1+4u_2.$$

因为 $F_0=1$, $F_1=1$, 故 $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1}{4}$. 由此得到此级数之和为

$$S=2.$$

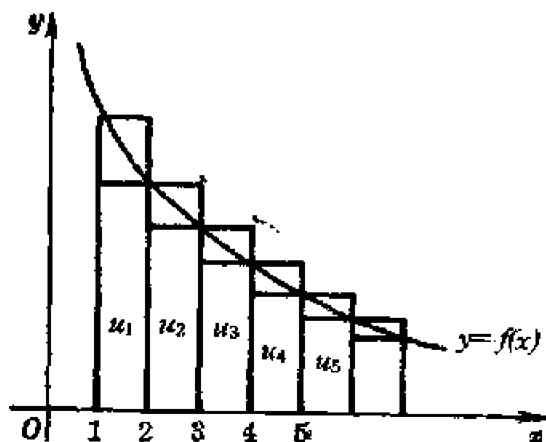


图 5.2

定理 5.5(柯西积分判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个正项级数, 且相应的数列 $\{u_n\}$ 是单调减小的. 设 $f(x)$ $(x>0)$ 是一个单调减小且连续的正值函数, 且 $f(n)=u_n(n=1, 2, \cdots)$.

那么，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件为数列 $\{A_n=\int_1^n f(x)dx\}$ 具有有限的极限.

证明 令

$$F(x)=\int_1^x f(x)dx.$$

因为 $f(x)$ 是单调减小的，所以当 $n\leqslant x\leqslant n+1$ 时，有

$$u_n=f(n)\geqslant f(x)\geqslant f(n+1)=u_{n+1}.$$

进一步可得(参看图5.2)，

$$u_n\geqslant\int_n^{n+1}f(x)dx=F(n+1)-F(n)\geqslant u_{n+1}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\geqslant F(n+1)-F(1)=A_{n+1}\geqslant\sum_{n=0}^{n+1}u_k.$$

如果单调递增数列 $\{A_n\}$ 具有有限极限，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和有上界，所以此时正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则单调递增数列 $\{A_n\}$ 有上界存在，因此它具有有限的极限．▌

例 11 考察级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^n\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{n\to+\infty}[\ln\ln n-\ln\ln 2]=+\infty.$$

故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散．又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln n}\right]=\frac{1}{\ln 2}.$$

故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

3．任意项级数

前面我们所讨论的级数每一项都是非负的．实际上，对于每项都是非正的级数，只要每项都乘以常数 -1，就可得到一个正项级数．根据性质1，便知这个正项级数的收敛性与原级数的收敛性是一致的. 对于只含有有限项为负的级数，根据性质5也可以作

为正项级数来讨论它的收敛性．现在我们要对同时含有无限项为正和无限项为负的级数进行讨论．首先可得下面的定理．

定理 5.6　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定也收敛．

证明　因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，因而根据柯西收敛原理可知，对于任意给定的正数 ε，都存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，下列不等式都成立：

$$\big||u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|\big|<\varepsilon.$$

又因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\leqslant\big||u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|\big|,$$

因此当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，下列不等式总成立：

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

由柯西收敛原理可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的．▌

定义 5.2　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 也收敛时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是绝对收敛的，否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是条件收敛的．

例 12　考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 的收敛性，其中 x 为任一实数，p 为一个大于 1 的实数．

解　因为

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},$$

由例 6 可知，当 $p>1$时，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛．根据正项级数的比较判别法便知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ $(p>1)$ 也是收敛的．故由定理 5.6 便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(p>1)$ 是一个绝对收敛的级数．

下面我们考察一种特殊类型的任意项级数．如果一个级数的各项的正负恰好相间，就称它为一个*交错级数*．交错级数的一般形式如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n>0). \tag{5.15}$$

定理 5.7[莱布尼兹 (Leibniz)] 设 $u_{n+1}\leqslant u_n$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n>0)$ 必收敛．设此级数之和为 S，则 $S\leqslant u_1$，且

$$|S-S_n|\leqslant u_{n+1}. \tag{5.16}$$

证明 因为此交错级数前 $2n$ 项之部分和 S_{2n} 可写成下列形式：

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}).$$

由假设条件可知，每个括号中之差都是非负的．因此这种部分和所组成的数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增的．而 S_{2n} 又可写成

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

故 $S_{2n}\leqslant u_1$．因此数列 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调递增且有上界的数列．所以数列 $\{S_{2n}\}$ 必有极限 S 存在，即

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=S\leqslant u_1.$$

又
$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}.$$

故
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}&=\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})\\&=\lim_{n\to+\infty}S_{2n}+\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}\\&=S+0=S.\end{aligned}$$

因此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是一个以 S 为极限的数列，即此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且它的和 $S\leqslant u_1$．

现从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 中删除前 n 项．当 n 为偶数时，所得级数即为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{n+k}$，显然它也是一个满足定理条件的交错级数，其和为 $S-S_n$，而且其和不应超过它的首项 u_{n+1}，即 $S-S_n\leqslant u_{n+1}$，故这时式(5.16)成立；当 n 为奇数时，所得级数即为 $-\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_{n+k}\right)$，而括号内级数满足定理条件，故同样可知，

删除前 n 项后所得级数之和为 $S-S_n$，且 $S_n-S\leqslant u_{n+1}$，故这时式(5.16)也成立. ▌

例 13 考察交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ $(s>0)$ 的收敛性.

解 当 $s>1$ 时，由例 6 和定理 5.6，便知此时级数是绝对收敛的. 当 $s\leqslant 1$ 时，由例 6 和定理 5.7，便知此时级数是条件收敛的.

最后，我们讨论两个级数的乘法运算. 给定两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 后，可作一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，其一般项 c_n 的定义如下：

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1, \tag{5.17}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	$\cdots$
b_2	a_1b_2 ↗	a_2b_2 ↗	a_3b_2 ↗		
b_3	a_1b_3 ↗	a_2b_3 ↗			
b_4	a_1b_4 ↗				
$\vdots$	$\vdots$				

称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的**柯西乘积**. 为了便于记忆，柯西乘积的一般项可通过上面所排列的表的"对角线"来获得. 对于两个都是绝对收敛的级数的柯西乘积有下面的定理，但我们略去它的证明.

定理 5.8 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是绝对收敛的，它们的和分别为 a 与 b，则它们的柯西乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也是绝对收敛的，它的和为 ab.

例 14 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$ $(|q|<1)$，说明它是一个收敛级数，并求它的和.

解 由例 3 可知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ $(|q|<1)$ 是绝对收敛的，

且其和 $S'=\frac{1}{1-q}$. 现考察此几何级数与它自己的柯西乘积 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$. 根据式(5.17)，可知

$$c_n=q^{n-1}q^0+q^{n-2}q^1+q^{n-3}q^2+\cdots+q^0q^{n-1}=nq^{n-1}.$$

换句话说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$ 就是几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ 与它自己的柯西乘积. 根据定理5.8便知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$ 是绝对收敛的，且其和$S=S'\cdot S'$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}. \tag{5.18}$$

§2 幂 级 数

1. 收敛半径

前面我们所讨论的级数都是数项级数，这种级数的每一项都是一个数. 微积分研究的主要对象是函数，那么，函数与级数又有什么联系呢？如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个 δ 邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则根据泰勒公式，在此 δ 邻域内 $f(x)$ 可写成下列形式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{5.19}$$

其中余项 $R_n(x)$ 如果写成拉格朗日形式，就是

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.20}$$

点 ξ 在 x_0、x 之间. 进一步，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内具有任何阶导数，且泰勒展开式的余项 $R_n(x)$ 的极限为零，即

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0, \tag{5.21}$$

则在此 δ 邻域内，函数 $f(x)$ 就可写成一个无穷级数：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots, \tag{5.22}$$

不过这个级数的每一项都是一个 x 的函数．我们把具有下列形式的无穷级数称为关于 $x-x_0$ 的幂级数：

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots, \tag{5.23}$$

其中 $a_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 都是常数．对于这种级数，我们首先关心的问题是变量 x 取哪些值时，给定的级数收敛．显然当 $x=x_0$ 时级数是收敛的．为了方便起见，令 $y=x-x_0$，于是级数(5.23)就成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ny^n$ 的形式．故下面就讨论形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{5.24}$$

的无穷级数的收敛范围．这种形式的级数称为幂级数．

定理 5.9 [阿贝尔 (Abel)] (1) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ 处收敛，则对于满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的任一个 x，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都是绝对收敛的．

(2) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处发散，则对于满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的任一 x，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都是发散的．

证明 (1) 根据假设条件，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ 是一个收敛的数项级数，故

$$\lim_{n\to+\infty}a_nx_0^n=0.$$

所以存在一个正数 M，使得下列不等式对于 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 都成立：

$$|a_nx_0^n|<M.$$

当 x 为满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的任一值时，$\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1$，故几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ 是一个收敛的正项级数．又因

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

故根据正项级数的比较判别法便知，正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 也是收敛的. 由此推出，对于满足条件 $|x|<|x_0|$ 的任一 x 值，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都是绝对收敛的.

(2) 用反证法. 假设存在一个值 x_1，满足条件 $|x_1|>|x_0|$，但相应的数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$ 是收敛的. 则根据 (1)，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 应在 $x=x_0$ 处收敛. 这与假设条件矛盾. 故对于满足条件 $|x|>|x_0|$ 的任一 x 值，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都是发散的. ▌

从这个定理便可推知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛范围只可能有下列三种情况：

(1) 仅在 $x=0$ 处收敛；

(2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是绝对收敛的；

(3) 存在一个正数 R，使得幂级数在 $(-R, R)$ 内是绝对收敛的，而当 $|x|>R$ 时幂级数是发散的.

为了统一起见，以 $R=0$ 和 $R=+\infty$ 分别表示情况(1)和(2). 这个 R 就称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径. 请注意，在情况(3)中，当 $x=R$ 和 $x=-R$ 时，幂级数是发散还是收敛，我们并不能肯定，要对具体问题再分别进行分析讨论. 下面的定理将给出求幂级数收敛半径 R 的一种方法.

定理 5.10 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 a_n 具有下列极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l,$$

则它的收敛半径为

$$R=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } l=0;\\ 0, & \text{当 } l=+\infty;\\ \dfrac{1}{l}, & \text{当 } 0<l<+\infty.\end{cases} \tag{5.25}$$

证明 对于某一个 x 值，应用达朗贝尔判别法于正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l|x|.$$

故当 $l|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛；当 $l|x|>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 发散. 由此便得式(5.25). ▌

例 1 考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的收敛范围.

解 当 $n\to+\infty$ 时，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{n+2}\to 1.$$

故此幂级数的收敛半径 $R=1$，即幂级数在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛. 当 $|x|>1$ 时此幂级数是发散的. 当 $x=1$ 时，相应的数项级数就是一个调和级数，所以是发散的. 当 $x=-1$ 时，相应的数项级数就是本章§1 例 13 中 $s=1$ 时的交错级数，而此时幂级数是条件收敛的. 这样就得知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的收敛范围为 $[-1, 1)$.

例 2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{\frac{n}{2}}x^{3n}$ 的收敛区间.

解 此级数可看成关于 $y=x^3$ 的幂级数. 当 $n\to+\infty$ 时，

$$\left|\frac{(n+1)2^{\frac{n+1}{2}}x^{3(n+1)}}{n2^{\frac{n}{2}}x^{3n}}\right|=\frac{n+1}{n}2^{\frac{1}{2}}|x|^3\to\sqrt{2}\,|x|^3.$$

故当 $\sqrt{2}\,|x|^3<1$，即 $|x|<2^{-\frac{1}{6}}$ 时级数收敛；当 $|x|>2^{-\frac{1}{6}}$ 时级数发散. 当 $x=2^{-\frac{1}{6}}$ 时，

$$n2^{\frac{n}{2}}x^{3n}=n\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

故此时级数发散. 同样当 $x=-2^{-\frac{1}{6}}$ 时级数也发散. 故此级数的收敛区间为 $(-2^{-\frac{1}{6}}, 2^{-\frac{1}{6}})$.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 对于它收敛范围内的每一个 x 值都对应于一

个实数 $f(x)$，$f(x)$ 就是相应的收敛的数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和. 因此在收敛范围内，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 定义了一个函数 $f(x)$，记为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x). \tag{5.26}$$

在上一节中，我们曾讨论过数项级数之间的相加以及柯西乘积等代数运算. 对于幂级数也可有相应的代数运算. 现设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$$

的收敛半径分别为 α 和 β. 令

$$r = \min\{\alpha, \beta\}.$$

由本章§1中性质2可知，在 $(-r, r)$ 内应有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = f(x) + g(x). \tag{5.27}$$

再由定理5.8可知，在 $(-r, r)$ 内应有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x), \tag{5.28}$$

其中，

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \tag{5.29}$$

2．泰勒级数

在本节开始时我们已说明，若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域内具有任意阶导数，且式(5.21)成立，则函数 $f(x)$ 在此 δ 邻域内就可写成级数(5.22)，称它为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数. 特别当 $x_0=0$ 时，级数(5.22)就成为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n + \cdots, \tag{5.30}$$

称它为函数 $f(x)$ 的马克劳林(Maclaurin)级数.

例3 试求函数 $f(x)=e^x$ 的马克劳林级数.

解 易知

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (n=1, 2, \cdots),$$

故 $$f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是 e^x 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x).$$

由式(5.20)，可知余项 $R_n(x)$ 的形式如下：

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1},$$

其中 ξ 为 0、x 之间的实数. 当 $n\to+\infty$ 时，对于任何实数 x 都有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}\right| \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.$$

应用定理 5.10，可以算得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 故函数 $f(x)=e^x$ 的马克劳林级数为：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty). \tag{5.31}$$

例 4 试求函数 $f(x)=\sin x$ 的马克劳林级数.

解 易知

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故 $f(0)=0,\ f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(n=1,\ 2,\ \cdots).$

于是 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{1}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)x^n+R_n(x)$$
$$(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{n\pi}{2}\right)x^{n+1} \ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

ξ 为 0、x 之间的实数. 当 $n\to+\infty$ 时，对于任何实数 x 都有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{n\pi}{2}\right)x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

应用定理5.10，可以算得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 故函数 $f(x)=\sin x$ 的马克劳林级数为：

$$\sin = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty). \tag{5.32}$$

例 5 试求函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 的马克劳林级数.

解 易知

$$f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-(n+1)} (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故 $$f(0)=1,\ \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是 $\frac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$\frac{1}{1-x}=1-x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

应用定理5.10，可以算得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R=1$. 由式(5.20)可知函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式的拉格朗日余项的形式如下：

$$R_n(x)=(1-\xi)^{-(n+2)}x^{n+1},$$

其中 ξ 为 0、x 之间的实数. 对于 $(-1,\ 0)$ 内的任一 x 值，$1-\xi>1$，$|x|<1$. 所以当 $n\to+\infty$ 时，有

$$|R_n(x)|=\left(\frac{|x|}{1-\xi}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\xi} \to 0.$$

我们知道，一般函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式的柯西余项的形式如下：

$$|R_n(x)|=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n,$$

$$(0<\theta<1) \tag{5.33}$$

因此 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处泰勒展开式的柯西余项为：

$$R_n(x)=(1-\theta x)^{-(n+1)}x^{n+1}(1-\theta)^n \quad (0<\theta<1).$$

对于 $[0, 1)$ 内任一 x 值，$0<1-\theta<1-\theta x$，$|x|<1$．所以当 $n\to+\infty$ 时，有

$$|R_n(x)|=\left|\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n x^{n+1}\frac{1}{1-\theta x}\right|<\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n\cdot\frac{1}{1-\theta x}\to 0.$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的马克劳林级数为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1). \tag{5.34}$$

3．幂级数的微积分运算

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则在区间 $(-R, R)$ 内幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 定义了一个函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad (-R<x<R).$$

关于函数 $f(x)$ 的微分、积分运算，可以证明如下的结论：

定理5.11 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，在区间 $(-R, R)$ 上它定义了函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

x 为区间 $(-R, R)$ 内的任一值，则

(1) 函数 $f(x)$ 在 x 处是连续的；如果幂级数在 $x=R$（或 $x=-R$）处收敛，则 $f(x)$ 在 $(-R, R]$（或 $[-R, R)$）上连续．

(2)
$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}. \tag{5.35}$$

(3) 函数 $f(x)$ 在 x 处是可微的，且

$$f'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}. \tag{5.36}$$

这个定理实际上是下节定理的特例，这里我们将不给予证明，而仅举若干例题来说明它的应用．

例 6 函数 $f(x)$ 如果能够展开成 x 的幂级数，则此幂级数必然就是 $f(x)$ 的马克劳林级数.

解 设 $f(x)$ 能够展开成下列幂级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

其收敛半径为 R. 那么在区间 $(-R, R)$ 内不断应用定理 5.11，就可分别得到

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots.$$

用 $x=0$ 分别代入 $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ 的展开式，便得

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{1}{2!}f''(0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

例 7 试求函数 $\ln(1+x)$ $(-1<x<1)$ 的马克劳林级数.

解 由式(5.34)可得函数 $\dfrac{1}{1+t}$ 的马克劳林级数

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^n t^n+\cdots \quad (-1<t<1). \tag{5.37}$$

由上一定理可知，当 $-1<x<1$ 时，有

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\int_0^x dt-\int_0^x t\,dt+\int_0^x t^2\,dt$$
$$-\int_0^x t^3\,dt+\cdots+\int_0^x (-1)^n t^n\,dt+\cdots.$$

于是便得到 $\ln(1+x)$ 的马克劳林级数如下:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$
$$(-1<x<1). \tag{5.38}$$

例 8 试求级数 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}+\cdots$ 之和.

解 由(5.37)可得函数 $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ 的马克劳林级数如下:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots,\quad (-1<t<1)$$

故由上一定理可知,当 $-1<x<1$ 时,有

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x dt-\int_0^x t^2dt+\int_0^x t^4dt-\int_0^x t^6dt$$
$$+\cdots+\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt+\cdots.$$

于是便得函数 $\operatorname{arc\,tg} x$ 的马克劳林级数如下:

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$
$$(-1<x<1). \tag{5.39}$$

注意到 $x=1$ 时,上述级数是一个交错级数,而且满足定理 5.7 的条件,故此交错级数是收敛的. 根据上一定理的结论(1),可得

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg} 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots. \tag{5.40}$$

例 9 计算下列定积分的近似值(精确到小数点后四位): $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$.

解 e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表示, 故现采用把它展开为幂级数再进行逐项积分的方法求它的近似值. 易知

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots.$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

应用定理 5.11,可得

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx=\int_0^{1/2}\left[1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6\right.$$
$$\left.+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\right]dx$$
$$=\int_0^{1/2}dx-\int_0^{1/2}x^2dx+\frac{1}{2!}\int_0^{1/2}x^4dx-\frac{1}{3!}\int_0^{1/2}x^6dx+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\cdot5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{3!\cdot7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2^2\cdot3}+\frac{1}{2^4\cdot5\cdot2!}-\frac{1}{2^6\cdot7\cdot3!}+\cdots\right].$$

上式括号内是一个满足定理 5.7 条件的交错级数. 由式(5.16)可知,取其前面四项时所得定积分的近似值,其误差绝对值

$$|\eta|<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2^8\cdot9\cdot4!}<\frac{1}{10^4}.$$

故得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot3}+\frac{1}{2^4\cdot5\cdot2!}-\frac{1}{2^6\cdot7\cdot3!}+\cdots\right)$$
$$\approx0.5205.$$

例 10* 对于二项式$(1+x)^\alpha$, 试证对一般实数α, 下列展开式成立:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$
$$(|x|<1). \tag{5.41}$$

证明 当α为正整数时, 上述展开式的右端只有有限项为非零, 此时展开式实际上就是牛顿二项式定理. 现不妨设α不是正整数,先考察下列幂级数的收敛性:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

应用定理 5.10, 可求得它的收敛半径$R=1$, 因此当$|x|<1$时此幂级数绝对收敛,记其和为$S(x)$,即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\quad(|x|<1).$$

应用定理 5.11,可得下列微分方程:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\quad(|x|<1)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)(\alpha-m)}{m!}x^m$$

$$= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} x^m$$

$$- x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)}{(m-1)!} x^{m-1}$$

$$= \alpha S(x) - xS'(x),$$

再根据 $S(x)$ 的定义，可知 $S(0)=1$，然后用分离变量法求解下列一阶线性齐次方程：

$$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{\alpha}{1+x} S(x), \\ S(0)=1, \end{cases}$$

便得到
$$S(x)=(1+x)^{\alpha}.$$

这样就证明了式(5.41)。

例 11* 试推出欧拉(Euler)公式 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$.

解 许多初等函数都有它们的幂级数展开式。现在我们想通过展开式来定义 e^z，其中 z 为复数。我们希望它仍能保持指数函数的基本性质：

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

先考察复数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 的收敛问题，其中复数 $C_n=a_n+ib_n$。如果它的部分和数列 $\{S_n\}$ 以某一复数 C 为极限，即对于任一正实数 ε，都存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_n-C|<\varepsilon$$

恒成立，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛，并收敛于 C。由于

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} C_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+ib_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+i\sum_{k=1}^{n} b_k=A_n+iB_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k,$$

因而当 $C=A+iB$ 时，

$$|S_n-C|=|(A_n+iB_n)-(A+iB)|$$
$$=\sqrt{(A_n-A)^2+(B_n-B)^2}.$$

所以复数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛于 $C=A+iB$ 就等价于实数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别收敛于 A 和 B.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ 收敛，那么由

$$|a_n| \leqslant |C_n|, \quad |b_n| \leqslant |C_n|,$$

便知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 也收敛. 此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 绝对收敛. 同样，对于两个绝对收敛的复数级数，可以作它们的柯西乘积，还可以证明类似于定理 5.8 的结果.

我们知道，当 x 为实数时，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

现把它推广到复数情况. 当 z 为复数时，考察复数级数

$$1 + z + \frac{1}{z!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots.$$

因为对于任何复数 z，下列级数

$$1 + |z| + \frac{1}{2!}|z|^2 + \frac{1}{3!}|z|^3 + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^n + \cdots$$

都是收敛的. 因而对于任何复数 z，复数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ 都是绝对收敛的. 我们把它的和定义为 e^z，即

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots. \qquad (5.42)$$

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ 为复数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n$ 的柯西乘积，其中 z_1 和 z_2 为任意给定的两个复数. 根据柯西乘积的定义，有

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n. \end{aligned}$$

由此便知，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_2^n$ 的柯西乘积为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n$.

于是根据现有定义，下列关系式应成立：

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{5.43}$$

当 $z=iy$ 时，根据现有定义，有

$$\begin{aligned}e^{iy}&=1+(iy)+\frac{1}{2!}(iy)^2+\frac{1}{3!}(iy)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots\\&=\left[1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}+\cdots\right]\\&\quad+i\left[y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\cdots\right].\end{aligned}$$

从式(5.32)得知，

$$\sin y=y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

因为 $(\sin y)'=\cos y$，应用定理 5.11 就得到 $\cos y$ 的展开式：

$$\cos y=1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}+\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

这样就得到著名的欧拉公式：

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{5.44}$$

由此还可推出下列结果：

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \tag{5.45}$$

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}. \tag{5.46}$$

最后我们指出，如果复数 $z=x+iy$，按指数运算法则，应有

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{5.47}$$

在这一节的最后，我们将常用的级数展开式集中列在下面，以便读者查阅：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\qquad(|x|<1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$
$$(-1<x\leqslant 1);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$
$$(-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$(-\infty < x < +\infty);$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$
$$(|x| \leqslant 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$
$$(|x| < 1);$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots$$
$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (|x| < 1).$$

§3* 函数项级数

1. 一致收敛

如果无穷级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{5.48}$$

中每一项 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是定义在区间 (a, b) 上的函数，就称级数(5.48)为在区间 (a, b) 上的一个函数项级数。上一节中的幂级数就是一类函数项级数(它的每一项都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的幂函数)。当 x 取区间 (a, b) 内某一数值 x_0 时，级数(5.48)就是一个数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots.$$

如果这个级数收敛，就称 x_0 为函数项级数(5.48)的一个收敛点，将其和记为 $S(x_0)$. 函数项级数(5.48)的全体收敛点所组成的集合，称为它的收敛区域，把它记为 Ω.

我们把函数项级数(5.48)的前 n 项之和记为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x). \tag{5.49}$$

显然，$S_n(x)$ 是在区间 (a, b) 上有定义的函数. 函数项级数(5.48)在它的收敛区域 Ω 内任一点 x 处都有一个和数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \tag{5.50}$$

因此在收敛区域 Ω 上，函数项级数(5.48)就定义了一个 x 的函数 $S(x)$，称它为函数项级数的和函数. 显然，在 Ω 上任一点 x 处都应有

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=S(x).$$

那么，定义在 Ω 上的和函数 $S(x)$ 的性质与这些 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的性质之间有何联系呢？如，当函数项级数中每一项 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是 Ω 上的连续函数时，$S_n(x)$ 当然也是 Ω 上的连续函数，而 $S(x)$ 是否一定也是 Ω 上的一个连续函数呢？这是关于和函数 $S(x)$ 的连续性问题，其它还可以讨论关于 $S(x)$ 的可微性和定积分存在性问题. 我们先来看一个例子.

例1 考察函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)^2x^2}{1+(n-1)^2x^2}\right),$$

其中 $-1<x<1$，讨论在它收敛区域 Ω 上定义的和函数 $S(x)$ 的连续性.

解 当 $-1<x<1$ 时，$u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 显然都是连续函数. 易知级数的前 n 项之和 $S_n(x)$ 为

$$S_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2},$$

它也是 $(-1, 1)$ 上的连续函数. 容易看出，当 $n\to+\infty$ 时，在 $(-1, 1)$ 内任一点 x 处，序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限都存在：

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } -1<x<0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1, & \text{当 } 0<x<1.\end{cases}$$

由此可见，对这个函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 来说，虽然级数的每一项 $u_n(x)$ 都是$(-1, 1)$上的连续函数，而且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$(-1, 1)$的每一点处都收敛，但它的和函数 $S(x)$ 在 $x=0$ 处是不连续的．也就是说，对于这个函数项级数，

$$\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\neq\sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to0}u_n(x)).$$

那么，在什么条件下，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的求极限运算与无穷项求和运算的运算次序才能交换呢？为了说明这个条件，下面引进一致收敛的概念．

定义 5.3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为区间(a, b)上的一个函数项级数，$S(x)$ 为(a, b)上有定义的函数．如果对于任意给定的正数 ε，都存在一个仅依赖于 ε 的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon \tag{5.51}$$

对于区间(a, b)内一切 x 值都成立，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(a, b)上一致收敛于 $S(x)$．

下面我们把 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(a, b)上一致收敛于 $S(x)$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(a, b)上收敛于 $S(x)$ 这两个概念作一比较．当正数 ε 给定后，后者仅要求对于(a, b)中任一 x 值都可找到一个相应的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式(5.51)成立．此时 N 的选取是依赖于 x 的，即对于不同的 x 值，选取的 N 可以是不同的．然而前者则要求对于给定的正数 ε，寻找一个统一的 N，使得当 $n>N$ 时，不等式(5.51)对于区间(a, b)内一切 x 值都成立，即 N 的选取不依赖于 x．从几何图形上看，就是在 ε 给定后，要求寻找正

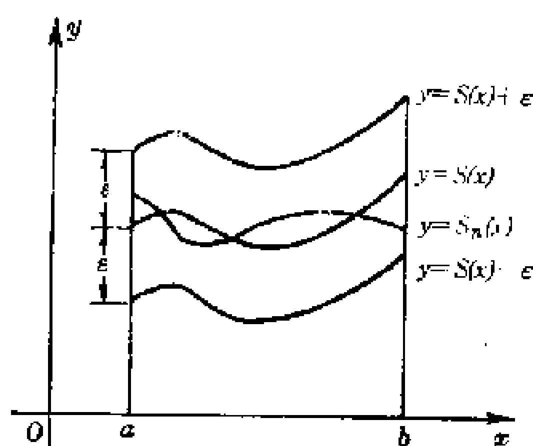


图 5.3

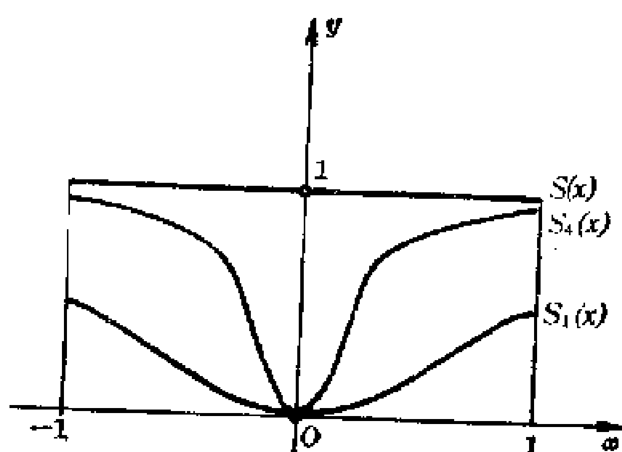


图 5.4

整数 N，使得当 $n>N$ 时，在 $(a,\ b)$ 上曲线 $y=S_n(x)$ 位于曲线 $y=S(x)+\varepsilon$ 与 $y=S(x)-\varepsilon$ 之间(参看图5.3)．而从例1的有关图形(图5.4)可以看出这种 N 是不存在的．因而相应的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 只是收敛于 $S(x)$，但并不是一致收敛于 $S(x)$．

例 2 试说明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是一致收敛的．

解 因为对于任一 x 值，都有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是一个收敛的正项级数，因而对于任一 x 值来说，数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 都是绝对收敛的．令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},$$

于是，

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}.$$

因此，对于给定的正数 ε，只要取正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，不等式

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

就对于$(-\infty,+\infty)$内一切 x 值都成立。所以此函数项级数在区间$(-\infty,+\infty)$内是一致收敛的。

下面我们先给出函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间(a,b)上一致收敛的一个充分条件，然后用它推导幂级数的一致收敛性。

定理 5.12 [维尔斯特拉斯(**Weierstrass**)] 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为区间(a,b)上的函数项级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为一个收敛的正项级数。如果存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_n(x)|\leqslant a_n,$$

对(a,b)内一切 x 都成立，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(a,b)上一致收敛。

证明 对于(a,b)内任一 x 值，由于当 $n>N$ 时 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛。因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故对于任意给定的正数 ε，都存在一个正整数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，下式成立：

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k<\varepsilon.$$

现令
$$N_2=\max\{N,\ N_1\}.$$

当 $n>N_2$ 时，由 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 可知，下列不等式对(a,b)内一切 x 都成立：

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k<\varepsilon,$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}-|u_k(x)|\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}-a_k>-\varepsilon.$$

于是便得，当 $n>N_2$ 时，对于(a,b)内一切 x，都有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛. ▌

例 3 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛的, 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致收敛的.

解 因为对于任意实数 x 和任意正整数 n, 下列不等式总成立:

$$|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|.$$

又根据假设条件, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 是收敛的. 故从上一定理便知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致收敛的.

定理 5.13 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$, 且 $0<r<R$, 则此幂级数在区间 $[-r, r]$ 上是一致收敛的; 又若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ (或 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n$) 收敛, 则幂级数必在 $[-r, R]$ (或 $[-R, r]$) 上一致收敛.

证明 我们只给出定理前一部分的证明. 由定理 5.9 可知, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 是绝对收敛的. 又当 $|x| \leqslant r$ 时, 不等式

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|.$$

对一切正整数 n 都成立. 由定理 5.12 知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. ▌

2. 一致收敛的级数的性质

定理 5.14(连续性) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 上一致收敛于函数 $S(x)$, 且 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是 (a, b) 上的连续函数, 则 $S(x)$ 也是 (a, b) 上的连续函数.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛, 所以对于任意给

定的正数 ε，都存在一个正整数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，下列不等式对于 (a, b) 内一切 x 值都成立：

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 N 为一个大于 N_1 的正整数. 设 x_0 为 (a, b) 内任一点. 由于 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是 (a, b) 上的连续函数，故 $S_N(x)$ 在 x_0 处是连续的. 因而对于上述正数 ε，一定存在正数 δ，使得 $x_0-\delta$ 和 $x_0+\delta$ 都在 (a, b) 内，并且当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，下列不等式成立：

$$|S_N(x)-S_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)|&\leqslant|S(x)-S_N(x)|+|S_N(x)-S_N(x_0)|\\&\quad+|S_N(x_0)-S(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明和函数 $S(x)$ 在 $x=x_0$ 处是连续的. 因 x_0 为 (a, b) 内任一点，故和函数 $S(x)$ 在 (a, b) 上是连续的. ∎

定理 5.15(逐项积分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛，且 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 上都是连续的，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right)=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx, \tag{5.52}$$

同时函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x u_n(t)dt\right)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛于函数 $\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt$ $(a\leqslant x\leqslant b)$.

证明 令

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad(n=1, 2, \cdots),$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

因为 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数，而且函数项

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛，因而$S_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$和$S(x)$都是$[a, b]$上的连续函数. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a, b]$上一致收敛于$S(x)$，所以对于任一给定的正数ε，都存在一个正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

对于$[a, b]$内一切x都成立，故当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx\right|\\&=\left|\int_a^b S(x)\,dx-\int_a^b S_n(x)dx\right|\\&\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|dx<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知，式(5.52)成立. 将上式中x换成t，积分上限b换成x $(a\leqslant x\leqslant b)$后，除了最后一个等号应改成$\leqslant$外，其余的关系仍然都成立. 由此可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x u_n(t)dt\right)$ 在区间$[a, b]$上一致收敛于$\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt$. ▌

定理5.16（逐项微分） 设$u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$在$[a, b]$上都有连续的导数$u_n'(x)$存在，且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在$[a, b]$上是一致收敛的. 又假设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a, b]$上是收敛的. 那么，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a, b]$上也一致收敛，且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).\tag{5.53}$$

证明 对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 应用定理5.15，可得

$$\begin{aligned}\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\right)dt&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x u_n'(t)dt\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(a)).\end{aligned}$$

由假设条件，知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛，故进一步可得

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a).$$

由定理5.15可知，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一致收敛的. 对上式两端关于 x 求导就得式(5.53). ▌

定理5.17 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则下列两个幂级数的收敛半径也均为 R:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; \tag{5.54}$$

$$(2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{5.55}$$

证明 由定理5.13可知，对于任一 $r(0<r<R)$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. 于是，由定理5.15进一步推得式(5.54)在 $(-R, R)$ 上成立. 现要证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R. 假设不然，设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R', $R' \neq R$, 则 R' 必然大于 R. 那末对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 应用公式(5.53)，便可推得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R', R')$ 上都收敛. 这与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R 的假设条件矛盾. 如果我们能证明式(5.55)在 $(-R, R)$ 上也成立，则与上述论证相同，可以证明这时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径也一定等于 R.

现证明式(5.55)在 $(-R, R)$ 成立. 易知，对于任一 $r_1(0<r_1<R)$，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_1^n$ 是绝对收敛的. 故 $a_n r_1^n \to 0\ (n\to+\infty)$，所以存在一个正数 M，使得对于 $n=0, 1, 2, \cdots$，下列不等式都成立.

$$|a_n r_1^n| < M.$$

故对于满足条件 $|x| < r_1$ 的任一 x_1，都有

$$|n a_n x_1^{n-1}| = \frac{n}{r_1}|a_n r_1^n| \cdot \left|\frac{x_1}{r_1}\right|^{n-1} < \frac{nM}{r_1}\left|\frac{x_1}{r_1}\right|^{n-1}.$$

应用达朗贝尔判别法，易知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nM}{r_1}\left|\frac{x_1}{r_1}\right|^{n-1}$ 是收敛的．于是由上式可推知数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x_1^{n-1}$ 是绝对收敛的．所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R, R)$ 上收敛．由定理 5.13 可知，对于任一 r $(0<r<R)$，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛．再由定理 5.16 便可推得式(5.55)在 $(-R, R)$ 上成立．▌

从定理 5.13 和定理 5.14 就可推得上节定理 5.11 的结论(1)．从上述几个定理同样还可推得定理 5.11 的结论(2)和(3)．

§4 傅利叶级数

1．三角函数系的正交性

在电子工程中往往需要把一些周期性的信号输入某一系统进行工作．为了分析这种周期性的信号进入系统内的情况，需要将这些周期性的信号看成是由一些最简单的周期性的信号——即正弦波——叠加而成的．也就是要把一个周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 表示成下列形式：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \tag{5.56}$$

其中 A_0 称为 $f(t)$ 的直流分量，

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5.57}$$

称为 $f(t)$ 的角频率，$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 称为 $f(t)$ 的 n 阶谐波，$|A_n|$ 称为 n 阶谐波的振幅，$n\omega$ 称为 n 阶谐波的角频率，φ_n 称为 n 阶谐波的初相位．利用和角公式，可有

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n(\sin n\omega t \cos\varphi_n + \cos n\omega t \sin\varphi_n)$$

$$= a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

其中，$$a_n = A_n \sin \varphi_n,\ b_n = A_n \cos \varphi_n.$$

如果把 A_0 写成 $\frac{a_0}{2}$，则式(5.56)可改写成下列形式：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \tag{5.58}$$

换句话说，要把周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 展开成关于 $\cos n\omega t$, $\sin n\omega t$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的级数.

把周期函数 $f(t)$ 展开成式(5.58)形式的级数，主要是确定系数 a_0, a_n, b_n $(n=1, 2, \cdots)$. 因为 $\sin 0\omega t = 0$, $\cos 0\omega t = 1$，因此 $\frac{a_0}{2}$ 也可看成是 $\cos 0\omega t$ 前的系数. 为此，我们先来讨论三角函数系：

$$1,\ \cos \omega t,\ \sin \omega t,\ \cos 2\omega t,\ \sin 2\omega t,\ \cdots,\ \cos n\omega t,\ \sin n\omega t,\ \cdots \tag{5.59}$$

的正交性. 因为 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，故

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0. \tag{5.60}$$

同样可得

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \sin n\omega t = 0. \tag{5.61}$$

利用三角函数积化和差的公式，可得

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega t \sin n\omega t\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} [\sin (n+m)\omega t + \sin (n-m)\omega t]\, dt = 0. \tag{5.62}$$

同样，当 $m \neq n$ 时，有

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega t \cos n\omega t\, dt = 0, \tag{5.63}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega t \sin n\omega t\, dt = 0. \tag{5.64}$$

应用倍角公式，可得

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2}, \tag{5.65}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2}. \tag{5.66}$$

最后还有

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1^2\, dt = T. \tag{5.67}$$

式(5.60)—(5.67)就称为三角函数系(5.59)的正交性.

2. 欧拉-傅利叶公式

设周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上可以展开成级数(5.58)，那么其中的系数如何确定呢？ 现假设级数(5.58)是可以逐项积分的(例如，当级数在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上一致收敛时)，则对它进行逐项积分就可以得到

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega t\, dt \right.$$
$$\left. + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin n\omega t\, dt\right).$$

由式(5.60)和(5.61)，得

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{a_0}{2} T,$$

即

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt. \tag{5.68}$$

如果再假设级数(5.58) 的每一项都乘 $\cos N\omega t$ 或 $\sin N\omega t$ 后仍是可以逐项积分的，就有

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos N\omega t\, dt = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \cos N\omega t\, dt$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos N\omega t \cos n\omega t\, dt\right.$$
$$\left. + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos N\omega t \sin n\omega t\, dt\right).$$

由式(5.62)、(5.63)和(5.65)，便得

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos N\omega t\, dt = \frac{a_N T}{2},$$

即

$$a_N=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos N\omega t\,dt \quad (N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \quad (5.69)$$

请注意，当 $N=0$ 时上式即为式(5.68)．同样可以得到

$$b_N=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin N\omega t\,dt \quad (N=1,\ 2,\ \cdots). \quad (5.70)$$

公式(5.69)和(5.70)称为欧拉–傅利叶(Euler-Fourier)公式．这样确定的系数 a_N 和 b_N 称为 $f(t)$ 的傅利叶系数．由这些系数确定的级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$ 称为 $f(t)$ 的傅利叶级数．

3．收敛性

当 $f(t)$ 给定后，由欧拉-傅利叶公式就确定了 $f(t)$ 的傅利叶级数．我们自然要问这个级数的收敛性如何，在收敛的地方它的和数是否就是相应的函数值 $f(t)$．下面的定理将回答这个问题，但我们略去它的证明．

定理 5.18［狄利克雷(Dirichlet)］ 设周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$ 上分段单调(即可把区间 $\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$ 分成有限个小区间，使得 $f(x)$ 在每个小区间上都是单调的)，则 $f(t)$ 的傅利叶级数在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上都是收敛的，且其和函数的值当 t 为 $f(t)$ 的连续点时即为 $f(t)$，否则等于 $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$．

下面举一例来说明把周期函数 $f(t)$ 展开成傅利叶级数的情况．易知，对于每个周期函数 $f(t)$，只要给出它在一个周期内的表达式，$f(t)$ 就完全给定了，所以下文中我们只给出周期函数 $f(t)$ 在一个周期内的表达式．

例 1 试将周期为 T 的周期函数

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\frac{T}{2}\leqslant t<0,\\ 1, & 0\leqslant t<\frac{T}{2}.\end{cases}$$

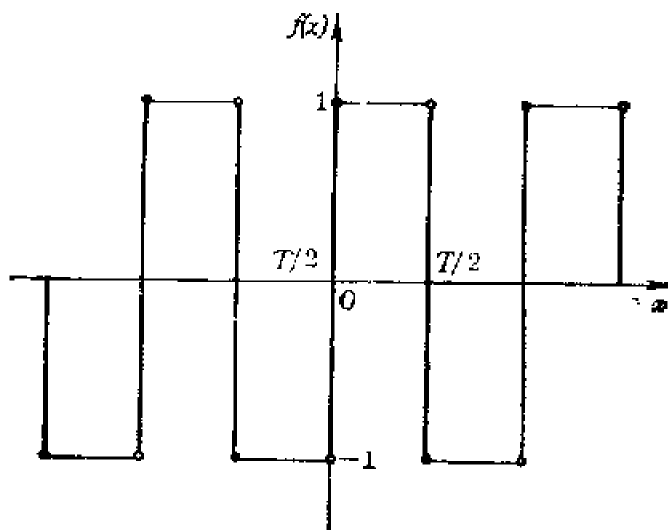


图 5.5

展成傅利叶级数.

解 按欧拉-傅利叶公式和 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,可得

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-1)dt+\frac{2}{T}\int_0^{2/T}dt=0,$$

$$a_N=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos N\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-\cos N\omega t)\,dt+\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos N\omega t\,dt$$

$$=0\qquad (N=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_N=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin N\omega t dt$$

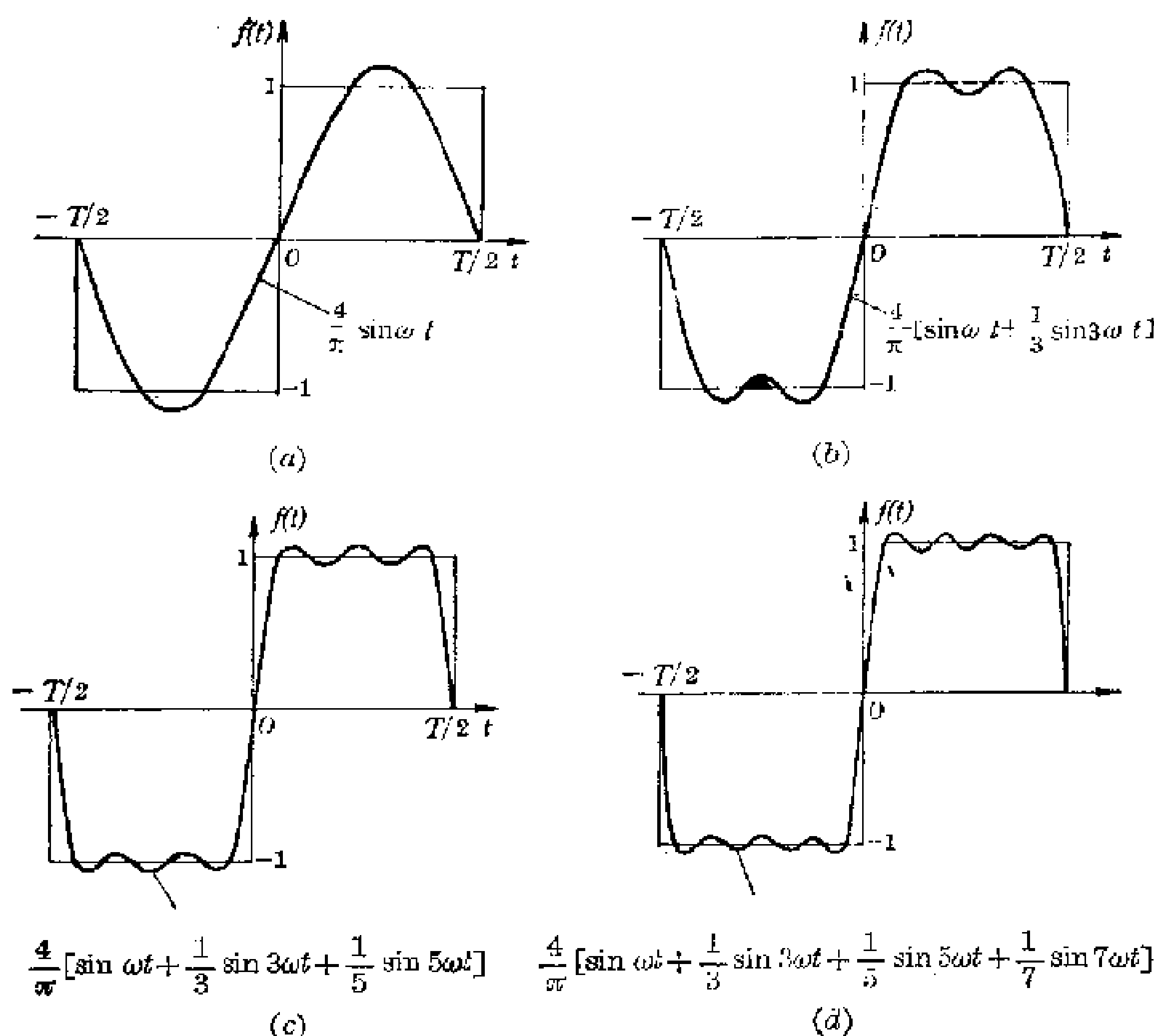
$$=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-\sin N\omega t)\,dt+\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin N\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2N\pi}\cos\frac{2N\pi}{T}t\,\Big|_{-T/2}^{0}-\frac{2}{T}\,\frac{T}{2N\pi}\cos\frac{2N\pi t}{T}\,\Big|_0^{T/2}$$

$$=\frac{1}{N\pi}(1-\cos(-N\pi))-\frac{1}{N\pi}(\cos N\pi-1)$$

$$=\frac{2}{N\pi}(1-\cos N\pi)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } N=2k;\\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & \text{当 } N=2k-1\end{cases}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots).$$



$\frac{4}{\pi}[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t]$

(c)

$\frac{4}{\pi}[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t]$

(d)

图 5.6

于是得到 $f(t)$ 的傅利叶级数如下：

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\omega t+\cdots\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\omega t.$$

由定理5.18可知，此傅利叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上都收敛，且在周期 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 内它的和函数的值如下：

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}=\begin{cases}-1, & -T/2<t<0;\\ 0, & t=0,\ -\dfrac{T}{2},\ \dfrac{T}{2};\\ 1, & 0<t<\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

这个级数说明，一个方波可以用一系列的正弦波叠加来表示，项数取得越多，近似程度就越好(见图 5.6)。

4.* 奇、偶函数的展开

如果 $g(t)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数(即 $g(-t)=-g(t)$)，则对于任一正数 c，都有

$$\int_{-c}^{c} g(t)\,dt=-\int_{0}^{c} g(t)\,dt+\int_{0}^{c} g(t)\,dt=0. \tag{5.71}$$

如果 $g(t)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数(即 $g(-t)=g(t)$)，则对于任一正数 c，都有

$$\int_{-c}^{c} g(t)\,dt=2\int_{0}^{c} g(t)\,dt. \tag{5.72}$$

易知，如果周期函数 $f(t)$ 是一个奇函数，则 $f(t)\cos N\omega t$ 是奇函数，而 $f(t)\sin N\omega t$ 是偶函数. 故由式(5.69)和(5.71)可知，此时

$$a_N=0 \quad (N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

即奇函数 $f(t)$ 的傅利叶级数的形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \tag{5.73}$$

由式(5.72)可知其系数 b_n 可写成下列形式:

$$b_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n=1,\ 2,\ \cdots). \tag{5.74}$$

同样，如果周期函数 $f(t)$ 是一个偶函数，则 $f(t)$ 的傅利叶级数的形式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t, \tag{5.75}$$

其系数 a_n 可写成下列形式:

$$a_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{5.76}$$

例 1 中周期函数 $f(t)$ 就是一个奇函数，因此它的傅利叶级数具有(5.73)形式.

例 2 试求周期为 T 的周期函数

$$f(t)=\begin{cases}-t, & \frac{T}{2}\leqslant t<0;\\ t, & 0\leqslant t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

的傅利叶级数(见图5.7).

解 因为$f(t)$是一个偶函数,故

$$b_N=0\quad(N=1,\ 2,\ \cdots).$$

而从式(5.76)可得:

$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)dt=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}t\,dt=\frac{T}{2},$$

$$a_N=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos N\omega t\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}t\cos\frac{2N\pi}{T}t\,dt$$

$$=\frac{4T}{2N\pi T}\sin\frac{2N\pi}{T}t\,\Big|_0^{T/2}-\frac{4T}{2N\pi T}\int_0^{T/2}\sin\frac{2N\pi}{T}t\,dt$$

$$=\frac{2T}{2N^2\pi^2}\cos\frac{2N\pi}{T}t\,\Big|_0^{T/2}=\frac{T}{N^2\pi^2}(\cos N\pi-1)$$

$$=\begin{cases}0\ , & 当\ N=2k;\\ -\frac{2T}{N^2\pi^2}, & 当\ N=2k-1\end{cases}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots).$$

又因为$f(t)$是一个连续函数,所以由定理5.18,便有

$$f(t)=\frac{T}{4}-\frac{2T}{\pi^2}\left[\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\right].$$

例3 设函数$f(t)$是一个定义在区间$[0,\ T]$上的函数,它并不是一个周期函数,其定义如下:

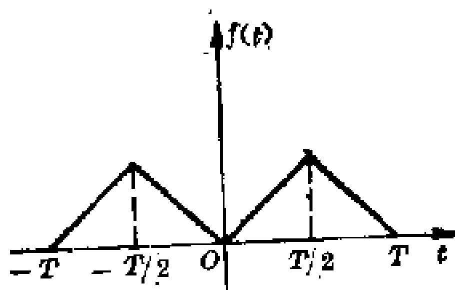


图 5.7

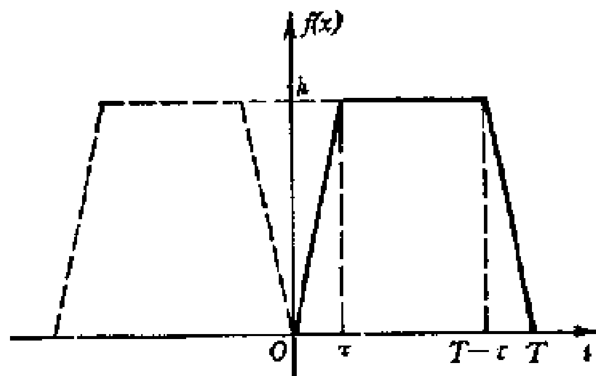


图 5.8

$$f(t)=\begin{cases}\frac{h}{\tau}t, & 0\leqslant t<\tau,\\ h, & \tau\leqslant t<T-\tau,\quad\left(0<\tau<\frac{T}{2}\right)\\ \frac{h}{\tau}(T-t), & T-\tau\leqslant t<T.\end{cases}$$

现要求把它展成傅利叶级数.

解 我们可以采用补充定义的方法把函数 $f(t)$ 开拓成为一个周期为 T 的偶函数或一个周期为 $2T$ 的奇函数. 然后求此周期函数的傅利叶级数. 下面我们仅就把它开拓成周期为 T 的偶函数的情况(参看图 5.8) 进行展开. 仍令 $\omega=\frac{2\pi}{T}$, 这时应有

$$b_N=0\quad(N=1,\ 2,\ \cdots),$$

而
$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\,dt=\frac{4}{T}\int_0^{\tau}\frac{h}{\tau}t\,dt+\frac{4}{T}\int_{\tau}^{T/2}h\,dt$$
$$=\frac{2h\tau}{T}+\frac{4h}{T}\left(\frac{T}{2}-\tau\right)=2h-\frac{2h\tau}{T},$$
$$a_N=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos N\omega t\,dt$$
$$=\frac{4}{T}\int_0^{\tau}\frac{h}{\tau}\ t\cos N\omega t\,dt+\frac{4}{T}\int_{\tau}^{T/2}h\cos N\omega t\,dt$$
$$=\frac{4h}{N\omega T\tau}\left[t\sin N\omega t+\frac{1}{N\omega}\cos N\omega t\right]\Bigg|_0^{\tau}$$
$$+\frac{4h}{N\omega T}\sin N\omega t\Bigg|_{\tau}^{T/2}$$
$$=\frac{hT}{N^2\pi^2\tau}(\cos N\omega\tau-1)\quad(N=1,\ 2,\ \cdots).$$

又因为 $f(t)$ 在 $[0,\ T]$ 上连续, 故在此区间上有

$$f(t)=h-\frac{h\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{hT}{n^2\pi^2\tau}\left(\cos\frac{2n\pi\tau}{T}-1\right)\cos\frac{2n\pi}{T}t.$$

5.* 傅利叶级数的复数形式

利用欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 我们可以得到

$$\cos n\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}\right),$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}).$$

这样，傅利叶级数的 n 阶谐波可改写如下：

$$\begin{aligned}
&a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \\
&= \frac{a_n}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) - \frac{ib_n}{2}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \\
&= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t} \\
&= \frac{1}{2}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

其中，
$$c_n = a_n - ib_n, \quad c_{-n} = a_n + ib_n.$$

易知 c_n 和 c_{-n} 是一对共轭复数．如果令

$$c_0 = a_0,$$

则傅利叶级数就可写成下列复数形式：

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \tag{5.77}$$

在讨论交流电路和分析频谱时，利用这种复数形式往往可以简化运算．因为

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned}
c_n = a_n - ib_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) f(t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t}\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{-n} = a_n + ib_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) f(t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t}\,dt \quad (n = 1, 2, \cdots),
\end{aligned}$$

因此三者可以统一写成一个公式：

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t}\,dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{5.78}$$

又易知，

$$|c_n| = |c_{-n}| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |A_n| \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

即复数 c_n 或 c_{-n} 的模就是 n 阶谐波 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 的振幅，因此也称 $c_n\,(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 为 n 阶谐波的复振幅。

例 4　试把下列周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 展成复数形式的傅利叶级数(见图 5.9)：

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<-\dfrac{\tau}{2},\\ h, & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & \dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

解　因为

$$c_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}h\,dt=\frac{2h\tau}{T},$$

$$c_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}he^{-in\omega t}dt$$

$$=\frac{-2h}{in\omega T}e^{-in\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{-h}{in\pi}\left(e^{-i\frac{n\omega\tau}{2}}-e^{i\frac{n\omega\tau}{2}}\right)$$

$$=\frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

因此除了函数 $f(t)$ 的间断点外，都有

$$f(t)=\frac{h\tau}{T}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{\infty}\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\,e^{i\frac{2n\pi t}{T}}.$$

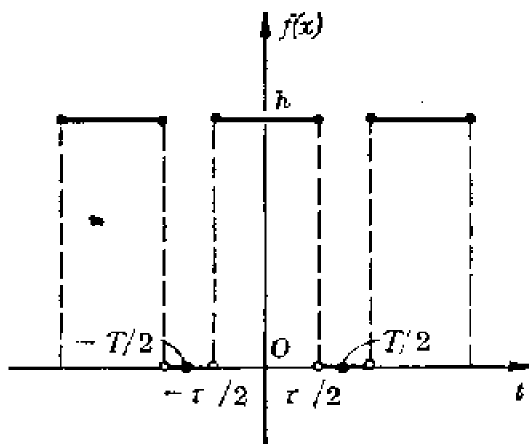


图　5.9

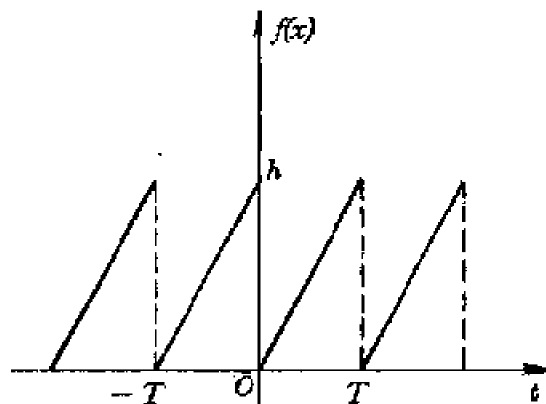


图　5.10

例 5　**频谱分析**　在电子工程中，设计周期性信号放大器时，必须考虑信号放大器的通频带宽问题．所谓通频带宽是指频率的

一个范围，在此频率范围内的各种不同频率的正弦波通过放大器时，所得的放大效能是均匀的，而当频率在此范围外的正弦波通过此放大器时，所得的放大效能可能就会大大降低．当然，放大器的通频带宽，有时希望设计得越宽越好，但这里存在技术上和成本上的问题．为了保证信号通过放大器后不致失真（相对而言），就应选择适当的通频带宽，使得它对于组成信号的影响较大的 n 阶谐波具有均匀的放大效能．这样就需事先将信号展开成复数形式的傅利叶级数，然后对它的各种谐波的频率和振幅进行分析，这就是频谱分析．

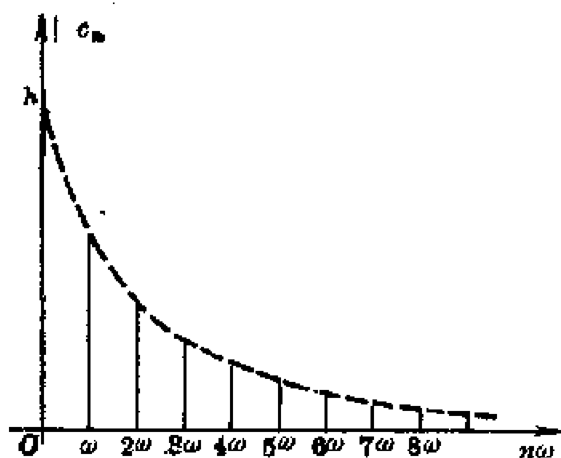


图 5.11

下面我们考察电视机系统中的锯齿波信号．在 $[0, T)$ 这一周期内锯齿波的函数表达式如下：

$$f(t)=\frac{h}{T}t,\quad 0\leqslant t<T.$$

它的图形见图 5.10．先把 $f(t)$ 展开成复数形式的傅利叶级数．由式(5.78)，有（我们采用 $[0, T)$ 周期，而不是 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 周期）

$$c_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{h}{T}\,t\,dt=h,$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{h}{T}\,te^{-in\omega t}dt\\&=\frac{2h}{-in\omega T^2}\,te^{-in\omega t}\Big|_0^T+\frac{2h}{in\omega T^2}\int_0^T e^{-in\omega t}dt\\&=\frac{h}{n\pi}i-\frac{2h}{i^2n^2\omega^2T^2}\,e^{in\omega t}\Big|_0^T\\&=\frac{h}{n\pi}i\qquad(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots).\end{aligned}$$

为了直观地表示 n 阶谐波的振幅 $|c_n|$ 和它的角频率 $n\omega$ 之间的对

应关系，我们把它画成频谱图(见图5.11)。

如果根据要求，可以把振幅小于 $\frac{1}{10}|c_1|$ 的 n 阶谐波忽略，那么这种放大锯齿波的放大器就应设计成对于角频率范围在 $[\omega, 10\omega]$ 内的正弦波具有均匀的放大效能。

习　　题

§ 1

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

2. 写出下列级数的一般项 a_n:

(1) $\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{5\ln 5}+\frac{1}{7\ln 7}+\frac{1}{9\ln 9}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\cdots$;

(3) $1-1+1-1+1-1\cdots$;

(4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

3. 根据级数的定义直接判定下列级数的收敛性：

(1) $1-1+1-1+\cdots$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}n!$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{8^2}{9^2}-\frac{1}{8^2}\right)+\left(\frac{8^3}{9^3}-\frac{1}{8^3}\right)+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$.

(提示：求部分和时先把部分和中的每一项都乘以 $2\sin\frac{\pi}{2}$，然后利用积化和差的公式把每一项都化成两个余弦函数之差.)

4. 利用柯西收敛原理判定下列级数的收敛性：

(1) $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots$　$(0<a_n<10)$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$;

(4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$;

(5) $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots$.

5. 利用比较判别法判定下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{n^2}}$;

(3) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3^2}+\sin\frac{\pi}{3^3}+\cdots$;　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 3}+\frac{1}{\sqrt{4}\ln 4}+\frac{1}{\sqrt{5}\ln 5}+\cdots$;　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)3^n}$.

6. 证明若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛, 且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛. 又问若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性如何?

7. 证明由等差级数的各项之倒数组成的级数是发散的.

8. 用适当的判别法判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n-1}$;　(2) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\cdots$;　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2^n}$;

(6) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$;

(9) $\frac{1}{2\ln^p 2}+\frac{1}{3\ln^p 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln^p n}+\cdots$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n=\left(\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx\right)^{-1}$;

(12) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

9. 判定下列级数的收敛性, 如果级数收敛, 请说明是绝对收敛, 还是条件收

敛:

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(3) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$;

(5) $\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\cdots$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$;　　(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

10. 设 $|x|<1$, $|y|<1$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

11. 证明$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$.

§ 2

1. 求下列幂级数的收敛范围:

(1) $x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$;

(2) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n$;

(5) $2(2x+1)+\frac{3}{2!}(2x+1)^2+\frac{4}{3!}(2x+1)^3+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$　$(a>0,\ b>0)$;　　(8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2. 将下列函数展开为幂级数,并求其收敛范围:

(1) $\operatorname{sh}x$;　　(2) a^x　$(a>0)$;

(3) $\cos^2x$;　　(4) $(1+x)\ln(1+x)$;

(5) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;　　(6) $\arcsin x$.

3. 试将 $f(x)=\lg x$ 展开成关于$(x-1)$的幂级数,并求其收敛范围.

4. 试求 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$ 的幂级数展开式,并求其收敛半径。

5. 试求 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 的幂级数展开式,并求其收敛半径。

6. 求下列级数的收敛范围,并求和:

(1) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$;　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$;　　(4) $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots$;

(5) $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$.

7. 利用函数的幂级数展开式，求下列函数值的近似值(精确到 10^{-4})：

(1) $\frac{1}{e}$;　　(2) $\sin 1^\circ$.

8. 利用被积函数的幂级数展开式，求下列定积分的近似值(精确到 10^{-3})：

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$;　　(2) $\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$.

9. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，试求函数 $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ 的幂级数展开式.

§ 3

1. 试求下列函数项级数的收敛范围：

(1) $\lg x+(\lg x)^2+(\lg x)^3+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\ (x>0,\ y>0)$;　　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2. 讨论下列函数项序列在所示区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, $(-\infty,\ +\infty)$;

(2) $f_n(x)=x^n$, $[0,\ 1]$;　　(3) $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$, $(0,\ +\infty)$;

(4) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$, $(-\infty,\ +\infty)$;　　(5) $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $[0,\ 1]$.

3. 证明下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $(-\infty,\ +\infty)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $(-2,\ +\infty)$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $1+\alpha\leqslant x<+\infty,\ \alpha>0$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$, $|x|<+\infty$.

4. 试证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin n^2x}{n^2}$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上一致收敛.

5. 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的一个连续函数，并具有连续导数.

6. 确定函数 $f(x)$ 的存在区域，并研究它们的连续性：

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$;　　　　(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$.

7. 试讨论函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{x^2+n^2}$ 的可微性.

§ 4

1. 试将下列周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 展开成 Fourier 级数. $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2)$ 内的定义如下:

(1) $f(t)=\begin{cases}0, & -5\leqslant t<0,\\ 3, & 0\leqslant t<5;\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t<0,\\ t, & 0\leqslant t<\pi;\end{cases}$

(3) $f(t)=t^2,\ -2\pi\leqslant t<2\pi$;　　(4) $f(t)=|t|,\ -1\leqslant t<1$.

2. 利用上题(3)证明下列结果:

(1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$;

(2) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

3. 试求函数 $f(x)=|\sin x|$ 的 Fourier 级数.

4. 试将函数 $f(x)=x(\pi-x)\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

5. 利用题 4, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

6. 设周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 级数在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上一致收敛于 $f(t)$. 试证明下面的 Parseval 恒等式:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

7. 利用 Parseval 恒等式及第4题, 证明下面结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

8. 利用 Parseval 恒等式及第 3题, 证明下面结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

9. 试将下列周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 展开成复数形式的 Fourier 级数. $f(t)$ 在 $[-T/2, T/2)$ 内的定义如下:

(1) $f(t)=\begin{cases}0, & -\frac{\pi}{2}\leqslant t<0;\\ 2\sin\frac{2\pi t}{T}, & 0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}-2, & -\frac{T}{2}\leqslant t<0,\\ 2, & 0\leqslant t<\frac{T}{2};\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases} -\dfrac{4t}{T}-2, & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<-\dfrac{T}{4}, \\ \dfrac{4t}{T}, & -\dfrac{T}{4}\leqslant t<\dfrac{T}{4}, \\ -\dfrac{4t}{T}+2, & \dfrac{T}{4}\leqslant t<\dfrac{T}{2}; \end{cases}$

(4) $f(t)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant t<-\dfrac{\pi}{2}, \\ t, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi. \end{cases}$

10. 设 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 内分段连续，a_n, b_n 为 $f(t)$ 展开成 Fourier 级数时相应的 Fourier 系数，N 为任一正整数. 试证明下述结论：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt.$$

第六章　广义积分

§1　无穷限广义积分

1. 概念和性质

在讨论定积分时，我们要求积分区间必须是一个有界区间，被积函数也应是一个有界函数，否则定积分就没有意义．但是无论在应用上还是在理论上都要求对积分的概念作一定的推广，要求在一定条件下不受上述两方面的限制．我们先把积分的概念推广到积分区间是无界区间(即积分上限、下限并不都是有限实数)的情况．为此，先考察下面的例子．

例 1　考察积分 $\int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx$ 和 $\int_1^A \frac{1}{x}\,dx$ $(A>1)$ 当 $A\to+\infty$ 时的极限．

解　因为当 $A\to+\infty$ 时，

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^A=1-\frac{1}{A}\to 1,$$

而

$$\int_1^A \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^A=\ln A\to+\infty.$$

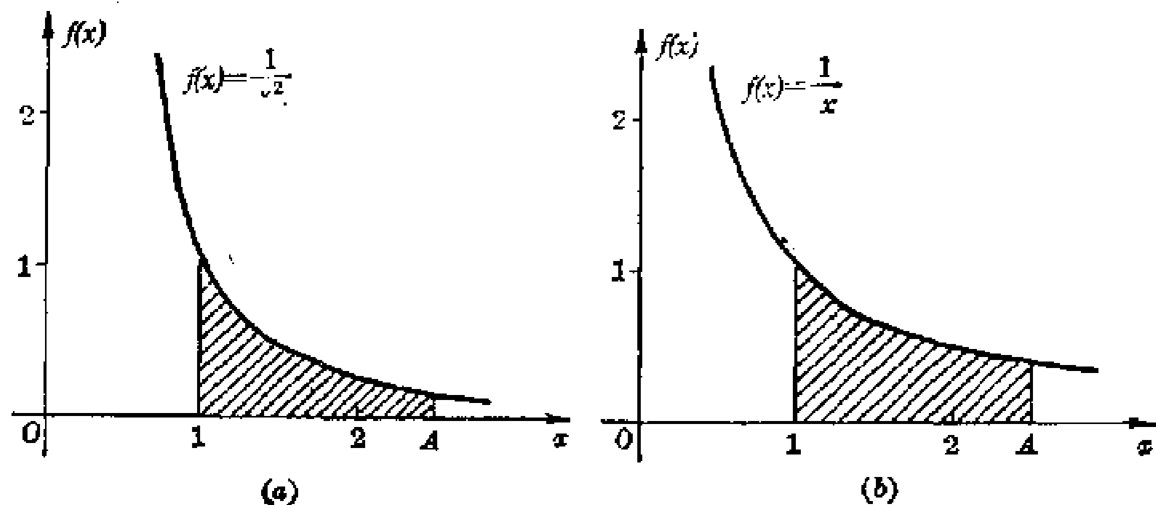


图　6.1

它说明前者的极限存在，其极限值为 1，即图 6.1(a) 中的曲边梯形的面积当点 A 向右无限延伸时它的面积以 1 为极限；而后者的极限不存在(见图 6.1(b))。

定义 6.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义，对任意实数 A $(A>a)$，$f(x)$ 在区间 $[a, A]$ 上的定积分 $\int_a^A f(x)dx$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \tag{6.1}$$

当极限存在且极限值为 I 时，就称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛的，其值为 I；否则就称它是发散的.

由例 1 可知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 是收敛的，而广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 是发散的.

例 2 考察广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ 的收敛性.

解 因为

$$\int_1^A \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_1^A = \operatorname{arc\,tg} A - \operatorname{arc\,tg} 1$$

$$\to \frac{\pi}{4}, \text{ 当 } A\to+\infty,$$

故广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛. 但因

$$\int_0^A \cos x\,dx = \sin A$$

当 $A\to+\infty$ 时，$\int_0^A \cos x\,dx$ 的极限不存在，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ 是发散的.

例 3 考察广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ $(a>0)$ 的收敛性.

解 当 $p\neq1$ 时，

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{1}{x^p}dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{a^{1-p}}{1-p}, & \text{当 } p>1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p<1 \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $p=1$ 时,

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{1}{x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty.$$

故广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx\ (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛,其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$; 当 $p\leqslant1$ 时发散.

由无穷限广义积分的定义易知, 收敛的无穷限广义积分具有下列性质:

(1) $\int_a^{+\infty}kf(x)\,dx=k\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$;

(2) $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^{+\infty}f(x)\,dx+\int_a^{+\infty}g(x)\,dx$;

(3) $\int_a^{+\infty}u\,dv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v\,du$;

(4) 相应的换元法则.

2. 收敛条件

由定义 6.1 可知, 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的收敛问题, 就是函数 $I(A)=\int_a^Af(x)dx$, 当 $A\to+\infty$ 时的极限是否存在的问题. 易知这个极限存在的充分必要条件可以叙述如下: 对于任一数列 $\{A_n\}$ ($A_n\geqslant a$, $A_n\to+\infty$), 相应的数列 $\{I(A_n)\}$ 的极限都存在, 且它们的极限值都是相同的.

如果我们任取一个数列 $\{A_n\}$ ($A_n\geqslant a$, $A_n\to+\infty$), 且不妨设 $A_0=a$, 则应有

$$I(A_n)=\int_a^{A_n}f(x)\,dx$$
$$=\int_{A_0}^{A_1}f(x)\,dx+\int_{A_1}^{A_2}f(x)\,dx+\cdots+\int_{A_{n-1}}^{A_n}f(x)\,dx.$$

令

$$u_k=\int_{A_{k-1}}^{A_k}f(x)\,dx,\quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \tag{6.2}$$

于是便得
$$I(A_n)=\sum_{k=1}^{n}u_k.$$
这样，对于上述数列$\{A_n\}$，我们就相应地得到一个无穷级数（数项级数）
$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots. \tag{6.3}$$
$I(A_n)$就是此无穷级数的前n项的部分和.

由此我们看到广义积分与无穷级数之间存在着密切的联系，它启发我们运用无穷级数方面的知识来讨论和研究广义积分. 关于广义积分收敛性的许多结论是与无穷级数收敛性的结论类似的. 下面我们只给出相应的定理而略去它们的证明.

定理6.1（**柯西收敛原理**） 广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件为：对于任意给定的正数ε，都存在一个正数M，使对于任意的$A'>M$和$A''>M$，下列不等式都成立：
$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon. \tag{6.4}$$

定理6.2 若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛.

因此广义积分与无穷级数相仿，也可定义绝对收敛和条件收敛的概念.

定义6.2 设广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛. 如果广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$也收敛，则称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是绝对收敛的；否则称它为条件收敛的.

定理6.3（**比较判别法**） (1) 设在区间$[a,+\infty)$内$|f(x)|\leqslant\varphi(x)$恒成立，且广义积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$收敛，则广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是绝对收敛的.

(2) 设在区间$[a,+\infty)$内$|f(x)|\geqslant\varphi(x)\geqslant0$恒成立，且广义积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$发散，则广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$也是发散的.

定理 6.4　设函数 $f(x)$、$\varphi(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 内都有定义，又 $\varphi(x)\geqslant 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}=l, \tag{6.5}$$

则

(1) 当 $0\leqslant l<+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也收敛；

(2) 当 $0<l\leqslant+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也发散.

特别取 $\varphi(x)=\frac{1}{x^p}$，根据上述定理和例 3 可得下面的定理：

定理 6.5(**柯西判别法**)　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$a>0$，则

(1) 当 $p>1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=l$，$0\leqslant l<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛；

(2) 当 $p\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=l$，$0<l\leqslant+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散.

例 4　考察广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 的收敛性.

解　因为在区间 $[1,+\infty)$ 上下列不等式总成立，

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$

因此

$$x^{\frac{3}{2}}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|=0.$$

由定理 6.5 便知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 是绝对收敛的.

例 5　考察广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的收敛性.

解 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

易知
$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0,$$

故由定理6.5便知广义积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 绝对收敛. 因此广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 也绝对收敛.

本节虽然只讨论了具有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 形式的无穷限广义积分，但对于具有 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 形式的无穷限广义积分也可作类似的考虑.

§2 无界函数的广义积分

1. 概念

本节将讨论把积分概念推广到被积函数是一个无界函数的情况. 为此，先考察下面的例子.

例1 考察积分 $\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{4\sqrt{1-x^2}}$ 和 $\int_0^{1-\eta}\frac{1}{1-x}dx$ 当 $\eta\to+0$ 时的极限.

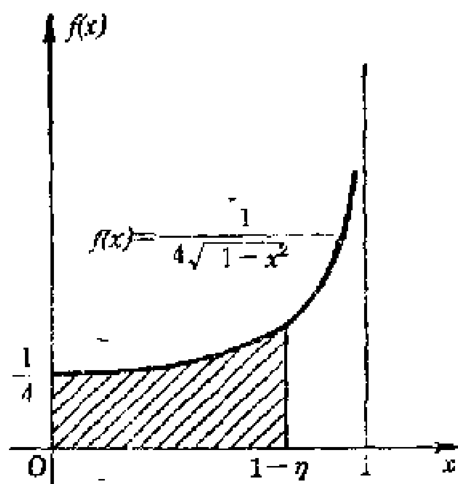


图 6.2

解 因为

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{1-x}=+\infty,$$

所以函数 $y=\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}$ 和 $y=\frac{1}{1-x}$ 在区间 $[0,1)$ 上都无上界. 但对于任一 $\eta\ (0<\eta<1)$，有

$$\int_0^{1-\eta}\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{4}\arcsin(1-\eta),$$

故极限　$$\lim_{\eta\to+0}\int_0^{1-\eta}\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{4}\arcsin 1=\frac{\pi}{8};$$

而极限　$$\lim_{\eta\to+0}\int_0^{1-\eta}\frac{1}{1-x}dx=\lim_{\eta\to+0}(-\ln\eta)=+\infty.$$

因此当 $\eta\to+0$ 时，积分 $\int_0^{1-\eta}\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}dx$ 的极限存在，其值为 $\frac{\pi}{8}$，而积分 $\int_0^{1-\eta}\frac{1}{1-x}dx$ 的极限不存在.

如果对于任一给定的正数 δ，函数在区间 $(b-\delta, b)$ 或 $(b, b+\delta)$ 内是无界的，则称点 b 为函数 $f(x)$ 的一个奇点.

定义 6.3　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上有定义，b 为 $f(x)$ 的一个奇点，且对于任意给定的正数 $\eta(\eta<b-a)$，定积分 $\int_a^{b-\eta}f(x)dx$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的广义积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx. \tag{6.6}$$

当上述极限存在时，就称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是收敛的；否则称它是发散的.

例 2　考察广义积分 $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$ 的收敛性.

解　当 $p\neq1$ 时，

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx&=\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}\frac{1}{(b-x)^p}dx\\&=\lim_{\eta\to+0}\left[\frac{1}{(p-1)\eta^{p-1}}-\frac{1}{(p-1)(b-a)^{p-1}}\right]\\&=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & \text{当 } p<1 \text{ 时};\\ +\infty\quad, & \text{当 } p>1 \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

当 $p=1$ 时，

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{1}{b-x}dx&=\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}\frac{1}{b-x}dx\\&=\lim_{\eta\to+0}[\ln(b-a)-\ln\eta]=+\infty.\end{aligned}$$

所以广义积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ 当 $p<1$ 时收敛，其值为 $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$；当 $p\geqslant 1$ 时发散.

2. 判别法

由于定义广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的式(6.1)与定义广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的式(6.6)在形式上十分类似．因而对于无界函数的广义积分 $\int_a^b f(x)dx$，同样可给出相应的性质、绝对收敛与条件收敛的定义及比较判别法和柯西判别法．下面我们就以相应的柯西判别法为例加以说明.

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的柯西判别法(定理 6.5)实际上是根据比较判别法(定理 6.3)和上节中的例 3 建立起来的．现根据关于无界函数广义积分相应的比较判别法和本节的例 2，也可以建立相应的关于广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的柯西判别法如下(定理的证明从略)：

定理 6.6 设在区间 $[a, b)$ 内函数 $f(x)\geqslant 0$ 且连续，b 为 $f(x)$ 的奇点，则

(1) 当 $p<1$，$\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=l$，$0\leqslant l<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(2) 当 $p\geqslant 1$，$\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=l$，$0<l\leqslant+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例 3 考察椭圆积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx\ (0<k<1)$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}<+\infty,$$

所以从定理 6.6 便知，此椭圆积分是收敛的.

以上我们对于 b 为 $f(x)$ 的奇点的广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 进行了讨论. 对于 a 为 $f(x)$ 的奇点的广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也可作同样的讨论. 下面我们举一例略加说明.

例4 考察广义积分 $\int_0^{\pi/2}(\ln\sin x)^2dx$ 的收敛性.

解 易知函数 $y=(\ln\sin x)^2$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内是非负且连续的, $x=0$ 为它的一个奇点. 因为在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内,

$$x^{\frac{1}{2}}(\ln\sin x)^2=\left(x^{\frac{1}{4}}\ln\frac{\sin x}{x}+x^{\frac{1}{4}}\ln x\right)^2,$$

而 $$\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{4}}\ln\frac{\sin x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{4}}\ln x=0,$$

所以, $$\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{2}}(\ln\sin x)^2=0.$$

故由当 $x=a$ 为 $f(x)$ 的奇点时广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的柯西判别法(类似定理 6.6), 可知广义积分 $\int_0^{\pi/2}(\ln\sin x)^2dx$ 是收敛的.

§3* 含参变量的广义积分

1. 含参变量积分

设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上有定义, 且对于区间 $[c, d]$ 中任一值 y_0, 定积分 $\int_a^b f(x, y_0)dx$ 都存在. 当然, 积分值 $\int_a^b f(x, y_0)dx$ 与 y_0 有关, 当 y_0 在区间 $[c, d]$ 上变动时积分值 $\int_a^b f(x, y_0)dx$ 一般说是不同的, 于是区间 $[c, d]$ 上任一 y 值都对应于一个数值 $\int_a^b f(x, y)dx$. 故积分 $\int_a^b f(x, y)dx$ 是变量 y 在 $[c, d]$ 上的函数, 记为

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)dx, \tag{6.7}$$

称积分 $\int_a^b f(x, y)dx$ 为含参变量 y 的积分. 下面我们将介绍它的一些性质.

定理 6.7(**连续性**) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续,则

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)dx$$

是变量 y 在区间 $[c, d]$ 上的连续函数.

证明 因为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续,从而它在此区域上一致连续,因而对于任意给定的正数 ε, 都存在一个正数 δ, 使得当 $|\Delta y|<\delta$ 时, 下列不等式对于区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 内任两点 (x, y) 和 $(x, y+\Delta y)$ 都成立:

$$|f(x, y+\Delta y)-f(x, y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是当 $|\Delta y|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|I(y+\Delta y)-I(y)|&\leqslant\int_a^b|f(x, y+\Delta y)-f(x, y)|dx\\&<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. ▌

这个结论也可改写成下列形式:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b[\lim_{y\to y_0}f(x, y)]dx, \tag{6.8}$$

即求极限与积分运算的顺序是可以交换的.

定理 6.8(**积分顺序的可交换性**) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续,则

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy.$$

这个结论在二重积分的计算中已作了论证.

定理 6.9(**求导与积分顺序的可交换性**) 设函数 $f(x, y)$ 和它的偏导数 $f_y(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上都是连续的, 则 $I(y)=\int_a^b f(x, y)$ 在区间 $[c, d]$ 上可导,且

$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^b f(x,\ y)dx\right]=\int_a^b f_y(x,\ y)dx. \tag{6.9}$$

证明 设 y 和 $y+\Delta y$ 都在 $[c,\ d]$ 上，那么

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}dx.$$

应用中值定理，有

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b f'_y(x,\ \eta)dx,$$

其中 η 为 y 与 $y+\Delta y$ 之间的某一值. 当 $\Delta y\to 0$ 时，由上式便得式(6.9). ∎

例 1 试求定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解 因为直接求函数 $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 的原函数比较困难，故我们考虑下列含参变量 y 的积分：

$$I(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}dx.$$

我们所求的定积分之值就是函数值 $I(1)$. 函数 $\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$ 及其关于 y 的偏导数 $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 上都连续，根据定理 6.9，便有

$$\begin{aligned}
I'(y)&=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx\\
&=\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+x^2}-\frac{y}{1+xy}\right]dx\\
&=\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+y\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(1+xy)\right]_{x=0}^{x=1}\\
&=\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right].
\end{aligned}$$

将上式两边都关于 y 从 0 到 1 积分，便得

$$\begin{aligned}
I(1)-I(0)&=\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right]dy\\
&=\int_0^1 \frac{1}{2}\ln 2\frac{1}{1+y^2}dy+\int_0^1 \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y}{1+y^2}dy
\end{aligned}$$

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\operatorname{arc\,tg} y\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)\Big|_0^1-I(1)$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1).$$

易知 $I(0)=0$，故由上式便得

$$I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

即

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

我们还会遇到另一种含参变量的积分，它的上下限也都是参变量的函数（例如在二次积分 $\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$ 中）：

$$I(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{6.10}$$

关于它的求导与积分的顺序交换问题，有如下的定理：

定理 6.10 设函数 $f(x, y)$ 和它的偏导数 $f_y(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上都连续，函数 $x_1(y)$ 和 $x_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上都可导，且 $a\leqslant x_1(y)\leqslant b$, $a\leqslant x_2(y)\leqslant b$ $(c\leqslant y\leqslant d)$，则函数 $I(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$ 在区间 $[c, d]$ 上可导，且

$$I'(y)=\frac{d}{dy}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx\right]$$

$$=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x, y)\,dx+f(x_2(y), y)x_2'(y)$$

$$-f(x_1(y), y)x_1'(y). \tag{6.11}$$

证明 对区间 $[c, d]$ 内任一 y 值和任一增量 Δy，函数 $x_1(y)$ 和 $x_2(y)$ 分别有增量

$$\Delta x_1=x_1(y+\Delta y)-x_1(y)$$

和

$$\Delta x_2=x_2(y+\Delta y)-x_2(y).$$

函数 $I(y)$ 的增量为

$$\Delta I=I(y+\Delta y)-I(y)$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{x_1(y)+\Delta x_1}^{x_2(y)+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)dx-\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \\
&=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} [f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]dx \\
&\quad+\int_{x_2(y)}^{x_2(y)+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)dx-\int_{x_1(y)}^{x_1(y)+\Delta x_1} f(x, y+\Delta y)dx.
\end{aligned}
$$

应用中值定理进一步可得:

$$
\begin{aligned}
\Delta I=&\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]dx \\
&+f(\xi_2, y+\Delta y)\Delta x_2-f(\xi_1, y+\Delta y)\Delta x_1,
\end{aligned}
$$

其中 ξ_1 位于 $x_1(y)$ 与 $x_1(y)+\Delta x_1$ 之间, ξ_2 位于 $x_2(y)$ 与 $x_2(y)+\Delta x_2$ 之间. 上式两端同除以 Δy, 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta I}{\Delta y}=&\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}dx \\
&+f(\xi_2, y+\Delta y)\frac{\Delta x_2}{\Delta y}-f(\xi_1, y+\Delta y)\frac{\Delta x_1}{\Delta y}.
\end{aligned}
$$

于是令 $\Delta y\to 0$ 便得式(6.11). ∎

例2 设 $I(y)=\int_y^{y^2} \frac{\sin xy}{x}dx$, 求 $I'(y)$.

解 由式(6.11), 得

$$
\begin{aligned}
I'(y)&=\int_y^{y^2}\cos xy\,dx+\frac{\sin y^3}{y^2}\cdot 2y-\frac{\sin y^2}{y}\cdot 1 \\
&=\frac{\sin xy}{y}\Big|_{x=y}^{x=y^2}+\frac{2\sin y^3}{y}-\frac{\sin y^2}{y} \\
&=\frac{3\sin y^3-2\sin y^2}{y}.
\end{aligned}
$$

例3 设 $I(y)=\int_0^y (x+y)e^x dx$, 求 $I''(y)$.

解 由式(6.11), 得

$$
I'(y)=\int_0^y e^x dx+2ye^y=e^y-1+2ye^y.
$$

所以 $$I''(y)=e^y+2e^y+2ye^y=(3+2y)e^y.$$

2. 含参变量广义积分的一致收敛

形如$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$的广义积分称为含参变量$y$的广义积分. 设函数$f(x, y)$在区域$a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$上有定义，且对区间$[c, d]$内任一$y$值广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$都收敛，此时含参变量$y$的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$就是参变量$y$在区间$[c, d]$上的函数，记为

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx. \tag{6.12}$$

如同函数项级数那样，对于含参变量y的广义积分也需要考虑它的一致收敛性问题，下面我们先给出关于含参变量广义积分的一致收敛定义.

定义 6.4 设函数$f(x, y)$在区域$a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$上有定义，且对于任意给定的正数$\varepsilon$，都存在一个数$M(M > a)$，使得只要$A > M$，下列不等式对于区间$[c, d]$内一切$y$值都成立：

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon, \tag{6.13}$$

则称含参变量y的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$在区间$[c, d]$上是一致收敛的.

类似于函数项级数，关于含参变量y的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$的一致收敛问题也有相应的维尔斯特拉斯判别法.

定理 6.11（维尔斯特拉斯） 设函数$f(x, y)$在区域$a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$上有定义，函数$F(x)$在$a \leqslant x < +\infty$上有定义，且广义积分$\int_a^{+\infty} F(x)dx$是收敛的. 如果不等式

$$|f(x, y)| \leqslant F(x), \tag{6.14}$$

对于区域$a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$内任一组$(x, y)$值都成立；则含参变量广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$在区间$[c, d]$上是一致收敛的.

证明 因为广义积分$\int_a^{+\infty}F(x)dx$是收敛的，因而对于任意给定的正数ε，都存在一个数$M(M>a)$，使得只要$A>M$，下列不等式总成立：

$$\left|\int_A^{+\infty}F(x)dx\right|<\varepsilon. \tag{6.15}$$

于是由式(6.14)和(6.15)便知，当$A>M$时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|\leqslant\left|\int_A^{+\infty}|f(x,y)|dx\right|\leqslant\left|\int_A^{+\infty}F(x)dx\right|<\varepsilon.$$

故含参变量广义积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在$[c,d]$上一致收敛. ▌

例4 考察含参变量λ的广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{1+x^2}dx$在区间$-\infty<\lambda<+\infty$上的一致收敛性.

解 对于任一λ值，下列不等式总成立：

$$\left|\frac{\sin\lambda x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

而广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2},$$

故由定理6.11便知，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{1+x^2}dx$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

如果对于区间$[c,d]$中任一y值，$\int_a^b f(x,y)dx$都是以$x=b$为奇点的广义积分，则$\int_a^b f(x,y)dx$也是一种含有参变量y的广义积分. 同样可以定义它的一致收敛性和建立相应的维尔斯特拉斯判别法.

3. 含参变量广义积分的性质

一致收敛的含参变量广义积分具有类似于一致收敛的函数项级数所具有的性质(例如：连续性，积分、微分运算的性质等). 下面我们只对$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$形式的含参变量广义积分进行讨论. 当然对于$\int_a^b f(x,y)dx$形式的含参变量广义积分也将有平行的结论.

正因为含参变量广义积分与函数项级数十分类似，所以我们在下面仅给出关于连续性定理的证明，而对于积分和微分运算方面的定理就不再给予证明.

定理 6.12（连续性） 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，且相应的含参变量 y 的广义积分在区间 $[c,d]$ 上是一致收敛的，则函数 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 是变量 y 在区间 $[c, d]$ 上的连续函数.

证明 设 y 为 $[c, d]$ 内的任一值，现要证明对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当 $|\Delta y|<\delta$ 时，下列不等式成立：

$$|I(y+\Delta y)-I(y)|<\varepsilon. \tag{6.16}$$

因为含参变量 y 的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上是一致收敛的，所以对于任意给定的正数 ε，都存在一个数 M ($M>a$)，使得当 $A>M$ 时，下列不等式对于区间 $[c, d]$ 内的一切 y 值都成立：

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.17}$$

又由函数 $f(x, y)$ 的连续性可知，对于上述实数 A，函数 $\int_a^A f(x, y)dx$ 是闭区间 $[c, d]$ 上的连续函数. 故对上面所取的 ε，总存在正数 δ，使得当 $|\Delta y|<\delta$ 时，下列不等式对于 $[c, d]$ 中任意两个值 y 和 $y+\Delta y$ 都成立：

$$\left|\int_a^A f(x, y+\Delta y)dx-\int_a^A f(x, y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.18}$$

从不等式(6.17)和(6.18)便知，当 $|\Delta y|<\delta$ 时下列不等式将成立：

$$\begin{aligned}|I(y+\Delta y)-I(y)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x, y+\Delta y)dx-\int_a^{+\infty} f(x, y)dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^A f(x, y+\Delta y)dx-\int_a^A f(x, y)dx\right| \\ &\quad + \left|\int_A^{+\infty} f(x, y+\Delta y)dx\right|\end{aligned}$$

$$+\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon.$$

于是式(6.16)成立. ∎

定理 6.13 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$ 上连续, 且含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 在区间 $[c, d]$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{6.19}$$

定理 6.14 设函数 $f(x, y)$ 和偏导数 $f_y(x, y)$ 在区域 $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$ 上都是连续的, 且对于 $[c, d]$ 内任一 y 值, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 都是收敛的, 此外, 含参变量 y 的广义积分 $\int_a^{+\infty} f_y'(x, y)dx$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则函数 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 在 $[c, d]$ 上是可导的, 且

$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)dx\right] = \int_a^{+\infty} f_y(x, y)dx. \tag{6.20}$$

例 5 试求 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\, dx \quad (-\infty < y < +\infty)$.

解 易知下列不等式对于任一 y 值都成立:

$$|e^{-x^2}\cos 2xy| \leqslant e^{-x^2}.$$

由本章§1中的例5得知广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 是收敛的, 所以由上式和定理 6.11, 便知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\, dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致收敛的. 又易知

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^{-x^2}\cos 2xy] = -2xe^{-x^2}\sin 2xy,$$

而且下列不等式对于任一 y 值都成立:

$$|-2xe^{-x^2}\sin 2xy| \leqslant 2xe^{-x^2}. \tag{6.21}$$

计算广义积分 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx$, 有

$$\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A 2xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\Big|_0^A\right) = 1,$$

故知广义积分 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx$ 收敛，由式(6.21)和定理 6.11 便知 $\int_0^{-\infty} -2xe^{-x^2}\sin 2xy\,dx$ 在$(-\infty, +\infty)$上是一致收敛的，于是根据定理 6.14 便知，$I(y)$ 在$(-\infty, +\infty)$上都是可导的，且

$$I'(y)=\int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2}\sin 2xy\,dx.$$

应用分部积分便得下面的微分方程：

$$\begin{aligned}I'(y)&=\int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2}\sin 2xy\,dx\\&=e^{-x^2}\sin 2xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-2y\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\,dx\\&=-2yI(y).\end{aligned}$$

应用分离变量法求解上述微分方程，可得通解如下：

$$I(y)=Ce^{-y^2},\tag{6.22}$$

其中 C 是一个常数. 在本章§4例3中，我们将得到

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

以这个初始条件代入式(6.22)，便知

$$C=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故最后得到

$$I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}.\tag{6.23}$$

§4* Gamma 函数和Beta函数

本节将讨论用含参变量广义积分定义的两个常用的函数——Gamma 函数和 Beta 函数.

1. 欧拉积分

含参变量 p 和 q 的广义积分

$$B(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad (p>0,\ q>0)\tag{6.24}$$

和含参变量 s 的广义积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx,\quad (s>0) \tag{6.25}$$

分别称为第一类和第二类欧拉积分. 可以得到下列结论:

(1) 当 $p>0$, $q>0$ 时 $B(p, q)$ 收敛;

(2) 含参变量 p, q 的广义积分 $B(p, q)$ 在形如 $0<a\leqslant p<+\infty$, $0<a'\leqslant q<+\infty$ 的任一区域上一致收敛;

(3) 当 $s>0$ 时, $\Gamma(s)$ 收敛;

(4) 含参变量 s 的广义积分 $\Gamma(s)$ 在形如 $0<a\leqslant s\leqslant b<+\infty$ 的任一区间上一致收敛.

因此这两类欧拉积分分别定义了两个函数. 含参变量 p, q 的广义积分(6.24)所定义的函数 $B(p, q)$ 称为 Beta 函数. 含参变量 s 的广义积分(6.25)所定义的函数 $\Gamma(s)$ 称为 Gamma 函数. 根据它们的一致收敛性易知: $B(p, q)$ 是区域 $0<p<+\infty$, $0<q<+\infty$ 上的连续函数, $\Gamma(s)$ 为区间 $0<s<+\infty$ 上的连续函数.

2. Gamma 函数和 Beta 函数

下面我们将给出关于 Gamma 函数和 Beta 函数的一些重要的性质.

性质 1

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s). \tag{6.26}$$

证明 应用分部积分法, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1)&=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s dx\\&=-x^s e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=s\Gamma(s).\end{aligned}$$ ∎

特别当 $s=n$ 为一个正整数时, 就得到

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)\\&=n!\,\Gamma(1)=n!\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=n!.\end{aligned} \tag{6.27}$$

因此, $\Gamma(s+1)$ 可以看成 $n!$ 在实数上的推广. 同时, 通过下面介绍的估计 $\Gamma(s+1)$ 值的斯特林(Stirling)公式, 也可以对 $n!$ 的值

作出估计(公式的证明从略)

性质 2

$$\Gamma(s+1)=\left(\frac{s}{e}\right)^{s}\sqrt{2\pi s}\,(1+\alpha), \tag{6.28}$$

其中，
$$\alpha=\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^{2}}-\frac{139}{51840s^{3}}+\cdots.$$

因此当 n 很大时，就有

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}. \tag{6.29}$$

性质 3

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{6.30}$$

证明 在 Beta 函数中，令 $x=\sin^{2}\theta$，有

$$\begin{aligned}B(p,\ q)&=\int_{0}^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\\&=2\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta.\end{aligned} \tag{6.31}$$

再在 Gamma 函数中令 $x=t^{2}$，就得

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^{2}}t^{2s-1}dt. \tag{6.32}$$

于是，
$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-t^{2}}t^{2p-1}dt\right)\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-u^{2}}u^{2q-1}du\right)\\&=4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}t^{2p-1}u^{2q-1}e^{-(t^{2}+u^{2})}dt\,du,\end{aligned}$$

变换成极坐标 $u=r\cos\theta,\ t=r\sin\theta$，上式就可写成

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_{0}^{\pi/2}d\theta\int_{0}^{+\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,dr\\&=\left(2\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta\right)\\&\quad\times\left(2\int_{0}^{+\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^{2}}dr\right).\end{aligned}$$

注意到式(6.31)和(6.32)，便得

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=B(p,\ q)\Gamma(p+q),$$

所以式(6.30)成立. ∎

例 1 计算 $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-3x}\,dx$.

解 令 $y=3x$, 有

$$\int_0^{+\infty} x^5 e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3^6}\int_0^{+\infty} y^5 e^{-y}\,dy$$

$$=\frac{1}{3^6}\Gamma(6)=\frac{40}{243}.$$

例 2 计算 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$, 其中 m, n 均为正整数.

解 令 $x=e^{-\frac{1}{m+1}y}$, 有

$$x^m=e^{-\frac{m}{m+1}y},\qquad (\ln x)^n=\left(-\frac{y}{m+1}\right)^n,$$

$$dx=-\frac{1}{m+1}e^{-\frac{1}{m+1}y}dy.$$

故
$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-y}y^n\,dy$$

$$=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

例 3 试求 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

解 从式(6.30)得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\Gamma(1).$$

由式(6.31)知

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi,$$

而
$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1.$$

因此,
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

从式(6.32), 可知

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx,$$

故
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 4　试求 $\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^5\theta\,d\theta$ 和 $\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,d\theta$.

解　由式(6.31)和(6.30)，并注意到 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，有

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^5\theta\,d\theta=\frac{B\left(\frac{5}{2},\ 3\right)}{2}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=\frac{8}{315}.$$

同样可有，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,d\theta=\frac{B\left(\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(4)}=\frac{5\pi}{32}.$$

例 5　试求：(1) $\int_0^1\frac{1}{(1-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}\,dx$；(2) $\int_0^2\frac{x^2}{(2-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$.

解　(1) 令 $y=x^{\frac{1}{3}}$，可得

$$\int_0^1\frac{1}{(1-x^{\frac{1}{3}})^{1/2}}\,dx=3\int_0^1 y^{3-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy=3B\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{16}{5}.$$

(2) 令 $x=2v$，可得

$$\int_0^2\frac{x^2}{(2-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx=4\sqrt{2}\int_0^1 v^{3-1}(1-v)^{\frac{1}{2}-1}\,dv$$

$$=4\sqrt{2}\,B\left(3,\ \frac{1}{2}\right)=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

习　题

§1

1. 计算下列广义积分：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\,dx$;　　　(2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;

(5) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x-2}$; (6) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\,dx$; (8) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$;

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$; (10) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$.

2. 判断下列广义积分的收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$;

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$; (4) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x+\sin x}{(x+1)(x+2)}\,dx$; (6) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\,dx$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$; (8) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^\lambda \ln x}$ (λ 是实数).

3. 试叙述关于广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 的比较判别法和柯西判别法.

4. 证明对于无穷限积分，下列分部积分公式成立(当公式中各部分运算都有意义时):

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x)dx.$$

并由此证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ 收敛，而且等于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

§ 2

1. 计算下列广义积分:

(1) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (2) $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\ln x\,dx$;

(3) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x^{1/3})}}\,dx$; (4) $\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}\,dx$;

(5) $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; (6) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos 2x}}\,dx$;

(7) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ a>1$;

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx,\ \alpha>\beta>0$.

2. 判断下列广义积分的收敛性:

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$; (2) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{ctg} x\,dx$;

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;　　(4)* $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$;

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}\,dx$, p, q 为实数;

(6) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$;　　(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$, $n>0$;

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^n}\,dx$;　　(9) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p+x^q}\,dx$, p, q 为实数.

3. 设 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的奇点, 试叙述关于广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的收敛原理和柯西判别法.

§ 3

1. 试求下列函数 $I(y)$ 的导数 $I'(y)$:

(1) $I(y)=\int_0^y \sin(x-y)\,dx$;　　(2) $I(y)=\int_0^{y^2} \operatorname{arctg}\frac{x}{y^2}\,dx$;

(3) $I(y)=\int_y^{y^2} e^{xy}\,dx$;

(4) $I(y)=\int_0^y f(x+y,\ x-y)dx$, 其中 f 具有各种一阶连续偏导数.

2. 讨论函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在区间$[0, 1]$上是正的连续函数.

3. 求椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ 和 $F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $(0<k<1)$的导数, 并以 $E(k)$ 和 $F(k)$表示之.

4. 证明上题中的椭圆积分 $E(k)$ 满足下列方程:

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{1}{1-k^2}E(k)=0.$$

5. 应用含参变量积分的求导与积分顺序的可交换性, 计算

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx.$$

(提示: 令 $\frac{b^2}{a^2}=k^2$, 以 k 为参数.)

6. 应用含参变量积分顺序可交换性, 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$　$(a>0,\ b>0)$;

(2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$　$(a>0,\ b>0)$.

7. 讨论下列含参变量积分在所示区间内的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx,\ 1\leqslant y<+\infty$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx,\ 1\leqslant y<+\infty$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx,\ -\infty<y<+\infty$;

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx,\ 0<y_0\leqslant y<+\infty$;

(5) $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx$, (i) $0<p_0\leqslant p<+\infty$, (ii) $0<p<+\infty$;

(6) $\int_0^1 \ln xy\,dx,\quad \frac{1}{b}\leqslant y\leqslant b,\ b>1$.

8. 研究下列函数的连续性:

(1) $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx,\quad -\infty<y<+\infty$;

(2) $F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{2+x^y}dx,\quad 2<y<+\infty$.

9. 从等式 $\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})=\int_a^b e^{-xy}dy$ 出发, 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})dx\quad (b>a>0).$$

10. 利用公式 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, 计算积分

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx.$$

§ 4

1. 利用 Beta 函数和 Gamma 函数计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^3dt$; (2) $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{5/2}dt$;

(3) $\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,e^{-t^3}dt$; (4) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{-\ln t}}dt$;

(5) $\int_0^{+\infty} 3^{-4t^2}dt$; (6) $\int_0^1 t^4(1-t)^3dt$;

(7) $\int_0^1 t^4(1-t^2)dt$; (8) $\int_0^2 t\sqrt[3]{8-t^3}\,dt$;

(9) $\int_0^2 (4-t^2)^{3/2}dt$; (10) $\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^2\theta\,d\theta$.

2. 证明 $\int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1}dt=\Gamma(x)$, 并求 $\int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\frac{1}{2}}dt$.

3. 证明 $\left(\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)\left(\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

4. 证明$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^p x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\ \frac{p+1}{2}\right)$，$p>0$，并由此推出：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,dx=\frac{2\cdot 4\cdot\cdots(p-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots p}\qquad(\text{当 }p\text{ 为奇数时});$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,dx=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(p-1)}{2\cdot 4\cdots p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\qquad(\text{当 }p\text{ 为偶数时}).$$

5. 已知$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$　$(0<p<1)$，求证：

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

6. 利用上题计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$.

7. 证明$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$.

（提示：利用第4题结果.）

习 题 答 案

第一章习题

§1　**1**. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.　**2**. $2\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{d}+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$.　**3**. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$.

4. $\boldsymbol{r}_1+\lambda(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)$; $\frac{1}{1+\lambda}(\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_3)$; $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$; $\boldsymbol{r}_1-\lambda\boldsymbol{r}_2+(\lambda-1)\boldsymbol{r}_3$.

5. (1) A、B、C、F、G 是坐标平面上的点，其中C、F、G 又是坐标轴上的点；(2) A在V；B在IV，C在VII，D在VIII.

6. (1) $\sqrt{3}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$; (2) $\sqrt{6}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$; (3) $\sqrt{13}$, $-\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{k}$; (4) 5, $-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}$.

7. (1) $-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$; (2) $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$; (3) $\sqrt{33}$; (4) $\left(-2, 3, \frac{5}{2}\right)$.

8. (3, 0, 4).

9. (1) $4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$; (2) $11\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; (3) $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; (4) $17\boldsymbol{i}+22\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$.

10. (1) 0; (2) 0; (3) $\boldsymbol{0}$; (4) $\boldsymbol{0}$; (5) $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$; (6) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

11. $\pm\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\boldsymbol{i}-\frac{3}{\sqrt{26}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{26}}\boldsymbol{k}\right)$.　**12**. (1) 成立；(2)、(3) 不成立.

13. (1)、(2)、(3) 均不成立.　**15**. $C(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，其中$C$为任意非零常数.

16. (1) 14; (2) 64; (3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; (4) $\frac{12}{7}\boldsymbol{i}+\frac{4}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k}$; (5) 14; (6) $-6\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$; (7) $18\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-14\boldsymbol{k}$; (8) 60.　**17**. (1)、(2) 成立；(3)、(4)不成立.

18. (1) $3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$; (2) $16\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{k}$; (3) $-13\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$; (4) 32; (5) $13\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}+19\boldsymbol{k}$; (6) $-2\boldsymbol{i}+32\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$.

19. $\sqrt{17}$.　**20**. $22\frac{2}{3}$.

§2 **1**. A、D两点在平面上.

2. (1) $3x-y-2z+1=0$; (2) $3x-y-2z=0$.

3. (1) $x-2y-z-7=0$; (2) $2y-z-6=0$; (3) $x-1=0$; (4) $z=0$.

4. (1) 与 z 轴平行; (2) 与 x 轴平行(过 x 轴); (3) 与 y 轴平行; (4) 与 z 轴垂直.

5. (1) $3x+2y+6z-12=0$; (2) $7x-24y+13z+20=0$; (3) $9x+7y-4z-11=0$.

6. $2x-y-3z=0$. **7**. $4x-11y-3z-11=0$.

8. $5x+y+3z+1=0$. **9**. (1) 1; (2) $\frac{4}{\sqrt{26}}$.

10. $\left(0,\ 0,\ -\frac{2}{7}\right)$或$\left(0,\ 0,\ -\frac{28}{5}\right)$.

11. (1) $\begin{cases}2x-3y=2,\\ z=1;\end{cases}$ (2) $x=-y=-z$;

(3) $\begin{cases}x=1,\\ 2y+3z=5;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x+2y=5,\\ z=0.\end{cases}$

12. (1) $\frac{x+5\frac{1}{3}}{2}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{z}{1}$; (2) $\frac{x-7}{-3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{-2}$;

(3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$; (4) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$.

13. $\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. **14**. $\left(-\frac{7}{3},\ \frac{37}{3},\ -8\right)$.

15. (1) $\begin{cases}x+3y-3=0,\\ 2y+z-1=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x-2z-11=0,\\ y=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-3=0,\\ y+6z-6=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}y=0,\\ z=-1.\end{cases}$

16. $\sqrt{\frac{7}{345}}$. **17**. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **18**. $\frac{x-2}{7}=\frac{y+1}{-42}=\frac{z}{74}$.

19. (1) $19x-8y+7z+12=0$; (2) $32x-y-88z-117=0$.

20*. $5x-10y-3z-2=0$; $5x+z+4=0$; $3x-4y-z=0$.

§3 **1**. (1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$; (2) $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; (3) $\boldsymbol{k}$.

2. (1) $12\cos 2t\boldsymbol{i}-12\sin 2t\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$;

(2) $e^t(\cos t-\sin t)\boldsymbol{i}+e^t(\sin t+\cos t)\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$;

(3) $3(\cos t-t\sin t)\boldsymbol{i}+3(\sin t+t\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

3. (1) $\begin{cases}x-y=0,\\ x+z=e^{\frac{\pi}{2}},\end{cases}$ $x+y-z-2e^{\frac{\pi}{2}}=0$;

(2) $\begin{cases} x=2, \\ \pi y - z - \dfrac{\pi^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$ $\quad y + \pi z - \dfrac{\pi^3}{4} + \dfrac{\pi}{2} = 0.$

4. (1) $3\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$; (2) $4t+5$; (3) $6(t^2+t-1)\boldsymbol{i}+4(t^3-2t)\boldsymbol{j}$;

(4) $(9t^2-3)\boldsymbol{i}-(12t+9)\boldsymbol{j}-(3t^2+2t-1)\boldsymbol{k}$.

6. $\dfrac{x-a}{a}=\dfrac{y-b}{2b}=\dfrac{z-c}{3c}$, $ax+2by+3cz-a^2-2b^2-3c^2=0$.

7.* (1) $\dfrac{1}{a(\mathrm{sh}^2 t+\mathrm{ch}^2 t+1)}$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}\,|\mathrm{ch}\,t|}$;

(2) $\dfrac{3}{25\sin t\cos t}$, $\dfrac{4}{25\sin t\cos t}$;

(3) $\dfrac{1}{3a(t^2+1)^2}$, $\dfrac{1}{3a(t^2+1)^2}$.

9. $-\omega^2\boldsymbol{r}(t)$.

10. (1) 是柱面，母线与 $\boldsymbol{k}$ 平行；(2) 是柱面，母线与 $\boldsymbol{i}$ 平行或母线与 $\boldsymbol{k}$ 平行；(3) 是柱面，母线与 $\boldsymbol{k}$ 平行；(4) 是柱面，母线与 $\boldsymbol{i}$ 平行.

11. (1) 是旋转椭球面，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成；(2) 不是；(3) 是旋转双叶双曲面，由 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1 \\ z=0\end{cases}$，或 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成；(4) 是旋转抛物面，由 $\begin{cases}3x=2y^2, \\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x=2z^2, \\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成；(5) 是旋转双叶双曲面，由 $\begin{cases}x^2-y^2=4, \\ z=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-z^2=4, \\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成；(6) 不是.

12. $y^2+z^2=\sin^2 x$. **13.** $x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+y^2}+3=0$.

14. $\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{7}{4}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{7}{4\sqrt{5}}\right)^2}=1$; $x^2+20y^2-24x=116$.

15. $(x-1)^2+(y-1)^2=8$. **16.** $(1, 6, 0)$, 5.

§4 **1.** $x_1=0$; $x_1^2-\dfrac{1}{2}y_1^2-\dfrac{1}{2}z_1^2+a^2=0$; $y_1^2+z_1^2=2a^2$.

2. (1) $(\sqrt{14}+\sqrt{3}+5)x'+(\sqrt{14}-3\sqrt{3}-1)y'+(\sqrt{14}+2\sqrt{3}-4)z'+\sqrt{42}=0$;

(2) $\begin{cases}(2\sqrt{14}-\sqrt{3})x'+(2\sqrt{14}+3\sqrt{3})y'+(2\sqrt{14}-2\sqrt{3})z' \\ \qquad -2\sqrt{42}=0, \\ (\sqrt{3}-5)x'+(3-3\sqrt{3})y'+(2\sqrt{3}+12)z'+6\sqrt{42}=0;\end{cases}$

(3) $x'^2+y'^2+z'^2+\left(\frac{2}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)x'-\left(\frac{6}{\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)y'+\left(\frac{4}{\sqrt{14}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $\times z'+1=0$.

3. (1) $\begin{cases}x'=x-2, \\ y'=y+3, \\ z'=z+1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x'=x-5, \\ y'=y, \\ z'=z+3;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x'=x, \\ y'=y-4, \\ z'=z+2.\end{cases}$

第二章习题

§1 **1.** (1) $\begin{cases}x>y, \\ x>-y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x>y, \\ x>0;\end{cases}$ (3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$; (4) $x-y+z>0$;

(5) $\begin{cases}x>1, \\ -x\leqslant y+z\leqslant x;\end{cases}$ (6) $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

2. (1) 2; (2) 0; (3) 1; (4) 0; (5) 0; (6) 0. **3.** (1) 0.1; (2) 0.0001. **5.** 连续.

7. (1) $x=y$; (2) $x=y+k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$; (3) $x=\frac{1}{2}y^2$;

(4) $\begin{cases}x=yk\pi, \ k=0, \pm1, \pm2, \cdots, \\ y=0.\end{cases}$

§2 **1.** (1) y, $x+6y^2$; (2) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (3) $\arcsin(x+y)+\frac{x}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$; (4) $\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{y}{x^2+y^2}$; (5) $-3e^{-2y}\sin 3x$, $-2e^{-2y}\cos 3x$; (6) $2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $2z\cos(x^2+y^2+z^2)$; (7) $3e^{3x+4y}\cos(2x+5z)-2e^{3x+4y}\sin(2x+5z)$, $4e^{3x+4y}\cos(2x+5z)$, $-5e^{3x+4y}\sin(2x+5z)$; (8) $\frac{yz}{x^2+y^2}$, $\frac{-xz}{x^2+y^2}$, $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; (9) $\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; (10) $y^z(x)^{y^z-1}$, $y^{z-1}z(x)^{y^z}\ln x$, $y^z(x)^{y^z}\ln x\ln y$.

2. (1) 3, 7; (2) 1, $2\ln 2+1$; (3) $\frac{1}{27}$, $-\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$; (4) 0, -2, 0.

5. (1) $\frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$; (2) $\frac{-2t}{(s-t)^2}ds-\frac{2s}{(s-t)^2}dt$;

(3) $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{2(1+xy)}\right)dx+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{y}\,(1+xy)}\,dy$; (4) $y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz$; (5) $(z+y^2\cos(x+z))dx+2y(\sin(x+z))dy+(x+y^2\cos(x+z))dz$; (6) $yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz$.

6. -0.204, -0.2. **7**. -0.0035, -0.0036.

8. 0.52π. **9**. 0.16 厘米.

10. (1) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 2t}$; (2) $4e^{2t}$; (3) $\dfrac{e^x+3x^2e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}$; (4) $3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$, $u^3(\cos v+\sin v)(1-3\sin v\cos v)$; (5) $\dfrac{2}{r-s}$, $\dfrac{2}{s-r}$; (6) $\dfrac{-t}{s^2+t^2}$, $\dfrac{s}{s^2+t^2}$.

11. $2xf_u+e^{x+y}f_v$, $-2yf_u+e^{x+y}f_v$.

13. $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x)+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x)$.

15. (1) $y\geqslant\dfrac{1}{2}x^2$; (2) $\dfrac{3}{2}(y-x^2)$; $\dfrac{3}{2}x$.

16. $8x+8y-z-12=0$, $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-12}{-1}$.

17. $3x+5y+4z-18=0$, $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-5}{5}=\dfrac{z+4}{4}$. **18**. $(-3,\ -1,\ 3)$.

§3 **1**. (1) $\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{-x}{(x+y)^2}$, $\dfrac{y}{(x+y)^2}$;

(2) $2a^2\cos(2ax+2by)$, $2b^2\cos(2ax+2by)$, $2ab\cos(2ax+2by)$;

(3) $y^x(\ln y)^2$, $x(x-1)y^{x-2}$, $y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y$;

(4) $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;

(5) $\dfrac{3}{x^2}\left(1-\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)^2\right)$, $\dfrac{3}{y^2}\left(1+\ln\dfrac{x}{y}\right)\left(3+\ln\dfrac{x}{y}\right)$, $-\dfrac{6}{xy}\left(1+\ln\dfrac{x}{y}\right)$;

(6) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$, 0.

6. $f''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y^2}{x^3}+g'\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{2y}{x^3}+g''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y^2}{x^4}$, $f''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{1}{x}+g''\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}$.

7. $a=-1$, $b=-\dfrac{1}{3}$, 或 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$.

8. $-\rho\sin\varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+\rho\cos\varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $-\sin\varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+\cos\varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}+\rho\cos 2\varphi\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $-\dfrac{\rho}{2}\sin 2\varphi\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\rho}{2}\sin 2\varphi\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

9. $\dfrac{2x}{y^3}f_2'+\dfrac{x^2}{y^4}f_2''$, 其中 f_2' 和 f_2'' 分别表示 f 关于第二个变元的一阶偏导数

和第二个变元的二阶偏导数.

11. $y+xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+R_4$.

12. $5+2h^2-hk-k^2$.

13. $1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)} \qquad (0<\theta<1).$$

§4 1. (1) $\frac{y-x^2}{y^2-x}$; (2) $\frac{y(xy+y+1)}{(1-xy)(1+x)}$; (3) $\frac{e^x-y}{x-\cos y}$;

(4) $\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$.

2. (1) $\frac{y-z}{x-2yz}$, $\frac{x+z^2}{x-2yz}$; (2) $-\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}-xy}$, $-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}-xy}$;

(3) $\frac{yz}{e^z-xy}$, $\frac{xz}{e^z-xy}$; (4) $-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$.

5. -1. **6**. $\frac{2xy(3xy-x^3-y^3-1)}{(y^2-x)^3}$. **7**. $\frac{12z^3-18xyz^2-27x^2y^2z}{(2z-3xy)^3}$.

8. $\frac{1}{x^2}\frac{F_1'}{F_2'}$, $\frac{1}{y^2}-\frac{F_1'}{F_2'}$.

9. $-\frac{c^2(a^2z^2+c^2x^2)}{a^4z^3}$, $-\frac{c^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3}$, $-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$.

10. $\frac{z-y}{y-x}$, $\frac{z-x}{x-y}$. **11**. $-\frac{ux+vy}{x^2+y^2}$, $\frac{vx-uy}{x^2+y^2}$, $\frac{uy-vx}{x^2+y^2}$, $-\frac{ux+vy}{x^2+y^2}$.

12. (1) $15x+15y+2z+11=0$, $\frac{x-2}{15}=\frac{y+3}{15}=\frac{z-2}{2}$;

(2) $2x-3y+2z-6=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$;

(3) $x+2y-4=0$, $\begin{cases}x-2=\frac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$

14. 常数 $C=\frac{9}{2}a$. **15**. $z=x$, $\begin{cases}y+2=0,\\ x+z-2=0.\end{cases}$

16. $3y+2z=0$, $\begin{cases}x+1=0,\\ 2y-3z+13=0.\end{cases}$ **17**. $2x-3y+2z=\pm 9$.

19. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$.

§5 1. (1) (4, −2)极小值点; (2) (−2, 0)极大值点, $\left(\frac{16}{7},0\right)$极小值

点；(3) $\left(\frac{a^3}{b}, \frac{b^3}{a}\right)$极小值点；(4) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$极大值点，$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$极小值点.

2. (1) $y=-\frac{19}{26}x+\frac{15}{13}$; (2) $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{3}$; (3) $y=\frac{4}{5}x+\frac{11}{10}$.

3. $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum x_i^2y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_iy_i & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum y_i & \sum x_i & n \end{vmatrix}$, $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_iy_i & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i & n \end{vmatrix}$,

$\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_iy_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}$，其中 $D=\begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{vmatrix}$.

4. 最大值为 3，$z(-2, 0)=z(0, 2)=3$，最小值为 0，$z(-1, 1)=0$.

5. (1) $z\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$;

(2) $z\left(-\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt[3]{16}}}, -\sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{1+\sqrt[3]{16}}}\right)=\sqrt{1+\sqrt[3]{16}}$;

(3) $u(3, 3, 3)=9$; (4) $u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)=u\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=u\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

6. $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$.　**7**. $\sqrt{6}$.　**8**. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$, $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$.

9. $f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$.　**10**. 长 2 米，宽 2 米，高 3 米.

11. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

12. $z\left(\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}, \cdots, \frac{a_n}{c}\right)=c$，其中 $c=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$.

第三章习题

§1 **1**. (1) 0; (2) $2(e-e^{-1})$; (3) 4; (4) $\frac{\pi}{6}$; (5) $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$.

2. (1) $2+\frac{\pi^2}{2}$; (2) $8\ln 8-16+e$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $\frac{5}{6}$.

3. (1) $\int_0^3 dx\int_0^2 f(x, y)dy=\int_0^2 dy\int_0^3 f(x, y)dx$;

(2) $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x, y)dy=\int_{-1}^0 dy\int_0^{y+1} f(x, y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x, y)dx$;

(3) $\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)dy=\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^{4} f(x, y)dx$;

(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)dx=\int_2^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y)dx$

$+\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$;

(5) $\int_{-2}^2 dx\int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy=\int_{-3}^3 dy\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x, y)dx$;

(6) $\int_0^4 dx\int_{-3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{-3+\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x, y)dy=\int_{-5}^{-1} dy\int_{2-\sqrt{4-(y+3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y+3)^2}} f(x, y)dx$.

4. (1) $\int_{-2}^5 dy\int_1^3 f(x, y)dx$;　(2) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x, y)dy$;

(3) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x, y)dx$;　(4) $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x, y)dx$;

(5) $\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)dx$;

(6) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)dx$.

5. (1) $6\frac{2}{3}$; (2) -2; (3) $12-2\ln 2$; (4) $14a^4$; (5) $\frac{9}{8}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$.　**6.** (1) 0; (2) $\pi(1-e^{-a^2})$; (3) $-6\pi^2$; (4) $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$.

7. $\frac{2}{3}\pi ab$.　**8.** $\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}$.　**9.** $\frac{1}{2}(e-1)$.　**10.** $\frac{41}{2}\pi$.　**11.** $\frac{11}{30}$.

12. $\frac{\pi}{2}$.　**13.** $\frac{1}{2}\sin 1$.　**14.** $\frac{5}{4}\pi a^2$.　**15.** $\frac{1}{6}$.　**16.** $\frac{1}{6}\pi a^3$.　**17.** $\frac{64}{9}a$.　**18.** $\pi-2$.

§2　**1.** (1) $-\frac{9}{2}$; (2) $\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$; (3) $\frac{1}{364}$; (4) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

2. (1) $\frac{16}{3}\pi$; (2) $\frac{1}{48}$; (3) $\frac{8}{9}a^2$; (4) $\frac{59}{480}\pi a^5$; (5) $\frac{1}{4}\pi h^4$; (6) 8π.　**3.** $\frac{1}{6}(abc)^2$.　**4.** $\frac{\pi}{4}$.　**5.** 37:27.　**6.** (2) $\frac{4}{105}\pi(35a_0+7a_2+3a_4)$.　**7.** $\frac{1}{3}a^3$.　**8.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{r}{4R}\right)\pi r^3$.

§3　**1.** (1) $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)\pi a^2$; (2) $\sqrt{2}\pi$; (3) $16R^2$.　**2.** $\pi a^2(1-e^{-1})$.

3. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$.　**4.** $\frac{5}{6}\pi a^3$, $\pi a^2\left(\sqrt{2}+\frac{5}{6}\sqrt{5}-\frac{1}{6}\right)$.　**5.** $\frac{8}{15}\pi$.

6. 0. 7. $\frac{1}{2}\pi HR^4$. 8. $\pi HR^2\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{3}H^2\right)$.

9. (1) $4\sqrt{61}$; (2) πa^3; (3) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$. 10. $\frac{2}{15}\pi R^6$. 11. π^2R^3.

12. (1) $a^3(2\pi^2+4\pi^4)$; (2) $a^{\frac{7}{3}}$; (3) $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{5})$; (4) $\frac{1}{3}p^2(5\sqrt{5}-1)$; (5) $\frac{1}{3}[(4\pi^2+2)^{3/2}-2\sqrt{2}]$; (6) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

13. $2b^2+2ab\frac{\arcsin c}{c}$, 其中 $c=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. 14. $\sqrt{3}(1-e^{-2})$.

§4 1. $\left(0,0,\frac{1}{4}\right)$. 2. $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$ 3. $\left(-\frac{1}{3}a,0\right)$. 4. $\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

5. $\left(0,0,\frac{5}{16}\right)$. 6. $\left(\frac{1-\cos 2}{1-e^{-2}},\frac{\sin 2}{1-e^{-2}},\frac{2}{1-e^{-2}}\right)$.

7. $\left(\frac{4}{3}a,\frac{4}{3}a\right)$. 8. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$. 9. $\frac{7}{5}mR^2$.

10. $\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$.

11. $I_{xy}=\frac{3}{5}mc^2$, $I_{yz}=\frac{3}{20}ma^2$, $I_{zx}=\frac{3}{20}mb^2$.

12. $I_x=I_y=\rho\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)$, $I_z=\rho a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

第四章习题

§1 1. (1) $\frac{1}{\sqrt{14}}(7x-2y+3z^2)$; (2) $\frac{1}{\sqrt{5}}(y^2z^3-6xy^2z^2)$;
(3) $\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}(\pi\cos(x+y)-\sin(y-z))$; (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{x-2y}(3\cos 2x-2\sin 2x)$; (5) $\frac{-2}{\sqrt{6}(x+y+3)}$. 2. 4. 3. (1) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$;
(2) $\frac{6}{25}\boldsymbol{i}-\frac{8}{25}\boldsymbol{j}$; (3) $-e(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$; (4) $-\boldsymbol{k}$; (5) $\frac{1}{4}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\pi\boldsymbol{k})$.

4. $e^{x+y}\cos z=-e$. 5. 在点$(-2,1,1)$处梯度为0.

6. 满足条件 $x=y=0$ 或 $x=y=z$ 的点(x,y,z)处梯度与 $\boldsymbol{k}$ 平行.

8. 在 $\boldsymbol{l}=10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$ 方向上函数增长率最大，最大值为 $\sqrt{216}$.

10. $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$.

§2 1. b^4. 2. $\frac{1}{2}\pi R^4$. 3. (1) $-\frac{1}{24}\pi R^6$; (2) 1.

4. $\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{2}\pi a^2$. 5. $\frac{38}{105}+\frac{5\pi}{32}$.

§3 1. (1) $3+2z$; (2) $(1-z)\sin y$; (3) e^{x}.

3. $\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x\cos x+y\cos y+z\sin z)-\ln(x^2+y^2+z^2)(\sin x+\sin y-\cos z)$

4. $\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$. 6. (1) $3a^4$; (2) 16; (3) $\frac{12}{5}\pi a^5$; (4) $\frac{1}{2}\pi h^4$.

7. $\frac{\pi}{2}$.

§4 1. (1) $\frac{1}{35}$; (2) 13; (3) $-\frac{14}{15}$; (4) $8\frac{4}{15}$; (5) $-\frac{1}{2}\pi aR^2$.

2. (1) 0; (2) $-(\cos y+x)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-x\cos y\boldsymbol{k}$; (3) $-2(x+y)\boldsymbol{k}$.

3. $-6x\boldsymbol{i}+(6z-1)\boldsymbol{k}$.

7. (1) $-\sqrt{3}\,\pi a^2$; (2) $-2\pi a(a+b)$; (3) $-\frac{9}{2}a^3$.

8. (2) $3x+x^2y-4yz$; (3) 6.

9. (3) $\boldsymbol{a}$ 是保守场, $xyz(x+y+z)$; (4) $\boldsymbol{a}$ 是保守场, $x^2e^{-y}+y\cos z$.

10. (1) $\frac{8}{3}$; (2) -3.

§5 2. (1) 12; (2) 16π; (3) $-2\pi ab$; (4) $\frac{1}{8}m\pi a^2$; (5) 2π.

3. (1) $\frac{1}{3}(x-y)((x+y)^2+2xy)$; (2) $y^2\cos x+x^2\cos y$; (3) $e^x[e^y(x-y+1)+y]$.

4. $3x+x^2y-xy^4$, 5. 5. (1) 12; (2) 4; (3) $e^a\cos b-1$.

6. $\frac{1}{4}\pi^2$. 7. $\lambda=3$, $-\frac{79}{5}$. 8. $f(x)=x(\sin x-x\cos x-1)$, $(1-\pi)+\frac{3}{2}\pi^2$.

§6 6. (1) $\nabla\varphi_{柱}=\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}(r\boldsymbol{e}_r+z\boldsymbol{e}_z)$, $\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_\rho$;

(2) $\nabla\varphi_{柱}=\frac{2}{r^2+z^2}(r\boldsymbol{e}_r+z\boldsymbol{e}_z)$ $\nabla\varphi_{柱}=\frac{2}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho$.

7. $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=2-\sin z$, $\nabla\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

8. $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=3-\frac{\theta}{\rho}\operatorname{ctg}\varphi$, $\nabla\times\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{\rho}+\frac{\varphi}{\rho}\operatorname{ctg}\varphi+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\rho-\frac{\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi-\frac{\theta}{\rho}\boldsymbol{e}_\theta$,

$\Delta\boldsymbol{a}=\frac{2}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\rho^2}\boldsymbol{e}_\theta$.

9. (2) $H_u=H_v=\sqrt{u^2+v^2}$, $H_w=1$;

(3) $\nabla F=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial F}{\partial u}\boldsymbol{e}_u+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial F}{\partial v}\boldsymbol{e}_v+\frac{\partial F}{\partial w}\boldsymbol{e}_w.$

第五章习题

§1 1. (1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots$; (2) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$;

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots$; (4) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$.

2. (1) $\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$; (2) $\frac{n}{n^2+1}$; (3) $(-1)^{n-1}$;

(4) $\frac{1}{n(n+1)}$.

3. (1)、(2)、(3)、(6) 发散; (4)、(5) 收敛. 4. (1)、(3)、(5) 收敛; (2)、(4) 发散. 5. (3)、(6) 收敛, (1)、(2)、(4)、(5) 发散. 8. (1)～(8)、(10)、(11)、(12) 收敛; (9) 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant1$ 时发散.

9. (1)、(4)、(5)、(6) 条件收敛; (2)、(3) 绝对收敛; (7) 当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$ 时绝对收敛, 当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{4}$ 时条件收敛, 当 $\frac{\pi}{4}<|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时发散, 其中 $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

§2 1. (1) $(-1, 1)$; (2) $(-\infty, +\infty)$; (3) $[-1, 1]$; (4) $(-3, -1)$; (5) $(-\infty, +\infty)$; (6) $(-1, 1)$; (7) $(-R, R)$, $R=\max\{a, b\}$; (8) $(0, +\infty)$.

2. (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(-\infty, +\infty)$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$, $(-\infty, +\infty)$;

(3) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $(-\infty, +\infty)$;

(4) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $[-1, 1]$;

(5) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

(6) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+1)}$, $(-1, 1)$.

3. $\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$, $(0, 2]$.

4. $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}$, $(-\infty, +\infty)$.

5. $\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $(-\infty, +\infty)$.

6. (1) $(-1, 1)$, $\frac{1}{(1-x)^2}$;

(2) $[-1, 1]$, $\begin{cases}(x+1)\ln(x+1)-x, & -1<x\leqslant 1,\\ 1, & x=-1;\end{cases}$

(3) $(-1, 1)$, $\frac{1}{(1-x)^3}$; (4) $(-1, 1)$, $1-\ln\sqrt{1-x^2}$;

(5) $(-1,1)$, $\frac{1+x}{(1-x)^2}$; (6) $(-1, 1)$, $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

7. (1) 0.3678; (2) 0.01745. 8. (1) 0.9446; (2) 0.3622.

9. $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)x^n$.

§3 1. (1) $\frac{1}{10}<x<10$; (2) $|x|>1$; (3) $|x|<1$; (4) $0<\min\{x, y\}<1$; (5) $x<-1$或$x>-\frac{1}{3}$.

2. (1)、(3) 一致收敛; (2)、(4)、(5) 非一致收敛.

6. (1) $(-1, 1)$ 上$f(x)$存在且连续; (2) $(-\infty, +\infty)$ 上$f(x)$存在且连续. 7. $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时可微.

§4 1. (1) $f(t)=\frac{3}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{5}$;

(2) $f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nt-\frac{1}{n}(-1)^n\sin nt\right]$;

(3) $f(t)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{n^2}\cos\frac{nt}{2}$;

(4) $f(t)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi t$,

3. $|\sin x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nx$, $(-\infty, +\infty)$.

4. $x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$.

9. (1) $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}e^{i2n\omega t}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$;

(2) $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4}{i(2n-1)\pi}e^{i(2n-1)\omega t}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$;

(3) $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4}{in^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{in\omega t}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$;

(4) $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2ni}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-(-1)^n\right)e^{int}$.

第六章习题

§1　1. (1) $\frac{1}{2}\ln 3$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{2}{5}$; (4) $\frac{1}{8}\pi^2$; (5) $\frac{2}{3}\ln 2$; (6) 1;

(7) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; (8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$; (9) $\frac{\pi}{2}-1$; (10) $\frac{a}{a^2+b^2}$.

2. (1)～(6)收敛; (7) 发散; (8) 当 $\lambda>1$ 时收敛, 当 $\lambda\leqslant 1$ 时发散.

§2　1. (1) $\frac{1}{8}\pi^2$; (2) $-\frac{4}{9}$; (3) $\frac{3}{2}\pi$; (4) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}$; (5) $\pi-2$;

(6) 0; (7) $-\frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\ln|\sqrt{a^2-1}+a|$; (8) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

2. (1)、(3)、(6)、(9) 收敛; (2)、(4) 发散; (5) 当 $p<1$, $q<1$ 时收敛; (7) 当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时收敛; (8) 当 $1<n<2$ 时收敛; (10) 当 $\min\{p, q\}<1<\max\{p, q\}$ 时收敛.

§3　1. (1) $-\sin y$; (2) $\left(\frac{1}{2}\pi-\ln 2\right)y$; (3) $(3y-y^{-2})e^{y^3}-(2-y^{-2})e^{y^2}$;

(4) $f(2y, 0)+\int_0^y\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\right)dx$, 其中 $u=x+y$, $v=x-y$.

2. $y=0$ 是 $F(y)$ 的唯一不连续点.

3. $E'(k)=\frac{1}{k}(E(k)-F(k))$, $F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$.

5. $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.　　6. (1) $\ln\frac{b+1}{a+1}$; (2) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

7. (1)、(2)、(3)、(4)、(6)一致收敛; (5) (i)一致收敛, (ii) 非一致收敛.

8. (1)、(2) 中的 $F(y)$ 在所示区间上连续.　　9. $\ln\frac{b}{a}$.

10. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$.

§4　1. (1) 6; (2) $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$; (3) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$; (4) $\sqrt{\pi}$; (5) $\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$; (6) $\frac{1}{280}$; (7) $\frac{2}{35}$; (8) $\frac{16}{9\sqrt{3}}\pi$; (9) 3π; (10) $\frac{8}{105}$.

2. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.　　6. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.